LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

INTERROGATION ÉCRITE — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Interrogation n°2 : durée 15 minutes

[Total : 10 pts]

1. Transformation de Lorentz – Muons atmosphériques

Transformation de Lorentz

On raisonnera dans le référentiel local terrestre $\mathcal{R}$, qu'on supposera galiléen/inertiel. On munit $\mathcal{R}$ d'une origine arbitraire O et d'un trièdre direct $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

On considère un second référentiel $\mathcal{R}'$, en translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, à la vitesse $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$, constante. On munit $\mathcal{R}'$ d'une origine O' et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

Enfin, on choisira l'origine des temps dans les deux référentiels de telle sorte que $t = t' = 0$ lorsque les origines O et O' se confondent.

2 pts **1.1 —** Écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui permettent de passer des coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ d'un événement M dans le référentiel $\mathcal{R}$ aux coordonnées $(ct', \mathbf{r}') = (ct', x', y', z')$ du même événement M dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Si on considère un événement M de coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, on obtiendra ses coordonnées spatio-temporelles $(ct', \mathbf{r}') = (ct', x', y', z')$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en utilisant les équations de la transformation de Lorentz. Dans la configuration considérée, elles s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \qquad \textit{i.e.} \qquad \left\{\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right.$$

avec

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

2 pts **1.2 —** Écrivez de même la relation réciproque, qui donne les coordonnées de l'événement M dans le référentiel $\mathcal{R}$ en fonction de ses coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

La relation réciproque s'écrit :

$$\begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

Application aux muons atmosphériques

On considère un muon μ^- produit à une altitude H de 15 km par une gerbe atmosphérique.

On suppose que le muon se déplace à la vitesse $v = 0.9995c$; on ne tiendra pas compte de ses interactions avec les molécules de l'atmosphère et on supposera que sa vitesse demeure parfaitement constante jusqu'au sol.

On considère deux référentiels : le référentiel terrestre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\oplus$, qu'on considère comme galiléen ; et le référentiel propre du muon, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{\mu^-}$.

On choisit les axes (Ox) et $(O'x')$ verticaux, orientés vers le bas ; par commodité, on place l'origine O au lieu de création du muon (à 15 km d'altitude), et on choisit l'origine des temps dans les deux référentiels à l'instant de création du muon (fig. 1).

On considère trois événements :

— E_0 : naissance du muon à l'altitude $H = 15\,\text{km}$, à $t_0 = t'_0 = 0$;

— E_1 : passage du muon à l'altitude $h = 5\,\text{km}$, niveau du sommet d'une montagne ;

— E_2 : le muon atteint le sol, au niveau de la mer.

1 pt **1.3 —** Que vaut le facteur $\gamma(v)$ pour le muon dans le référentiel terrestre ? Application numérique.

La vitesse du muon étant $v = 0.9995c$ dans le référentiel terrestre, on a par conséquent :

$$\beta = \frac{v}{c} = 0.9995 \qquad \text{et} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 31.63.$$

5 pts **1.4 —** En utilisant la transformation de Lorentz (directe ou réciproque), complétez le tableau suivant, en donnant les expressions analytiques, puis les valeurs numériques, des coordonnées spatio-temporelles des événements E_1 et E_2 dans les deux référentiels, celui de la Terre et celui du muon.

Comparez avec le temps de vie moyen d'un muon ($\tau_\mu = 2.2\,\mu\text{s}$). Commentez.

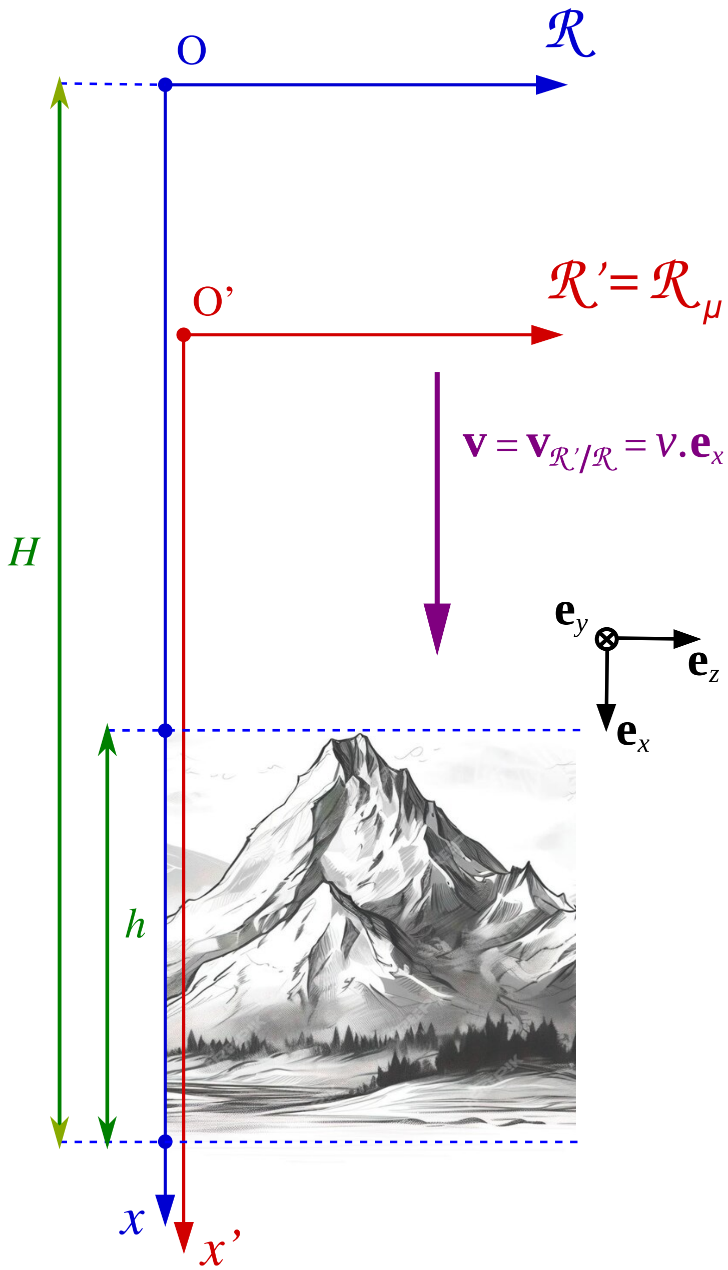

FIGURE 1 – *Référentiels de la Terre ($\mathcal{R} = \mathcal{R}_\oplus$) et du muon ($\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{\mu^-}$). On choisit l'origine des temps ($t = t' = 0$ quand $O = O'$) à l'instant où le muon est créé, à une altitude $H = 15$ km au dessus du niveau de la mer. On note E_1 l'événement de passage du muon au niveau du sommet de la montagne, et E_2 l'arrivée du muon au sol (niveau de la mer).*

Événement	$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\oplus}$	$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{\mu^-}$
E_0 : création du μ^-.	$x_0 = 0$ $t_0 = 0$	$x'_0 = 0$ $t'_0 = 0$
E_1 : μ^- à l'altitude $h = 5\,\text{km}$.	$x_1 = H - h = 15\,\text{km} - 5\,\text{km} = 10^4\,\text{m}$ $t_1 = \dfrac{H-h}{v} = \dfrac{10^4\,\text{m}}{0.9995c} \simeq 33.4\,\mu\text{s}$	$x'_1 = 0$ $t'_1 = \dfrac{t_1}{\gamma(v)} \simeq 1.06\,\mu\text{s}$
E_2 : le μ^- atteint le sol.	$x_2 = H = 15\,\text{km} = 1.5 \times 10^4\,\text{m}$ $t_2 = \dfrac{H}{v} = \dfrac{1.5 \times 10^4\,\text{m}}{0.9995c} \simeq 50.1\,\mu\text{s}$	$x'_2 = 0$ $t'_2 = \dfrac{t_2}{\gamma(v)} \simeq 1.58\,\mu\text{s}$

Calcul de t'_1 :

$$t'_1 = \gamma(v)\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = \gamma(v)\left[\frac{H-h}{v} - \frac{v(H-h)}{c^2}\right] = \frac{H-h}{v}\gamma(v)\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{H-h}{v} = \frac{t_1}{\gamma(v)}.$$

Calcul de t'_2 :

$$t'_2 = \gamma(v)\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \gamma(v)\left[\frac{H}{v} - \frac{vH}{c^2}\right] = \frac{H}{v}\gamma(v)\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{H}{v} = \frac{t_2}{\gamma(v)}.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{\mu^-}$ du muon, qui est donc le *référentiel propre* du muon, le temps séparant deux événements de la vie du muon semble s'écouler nettement plus lentement que dans le référentiel terrestre : ainsi, les événements E_1 (passage du muon au niveau du sommet) et E_2 (arrivée au sol) sont séparés par $\Delta t = t_2 - t_1 \simeq 16.7\,\mu\text{s}$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\oplus}$, tandis que les mêmes événements sont séparés par $\Delta t' = t'_2 - t'_1 \simeq 0.52\,\mu\text{s}$ dans le référentiel propre du muon. Bien que le temps de vie moyen *au repos* du muon ne soit que de $\tau_\mu = 2.2\,\mu\text{s}$, l'effet de dilatation du temps permet à une fraction non négligeable des muons produits en altitude d'atteindre le sol.