Sciences Sorbonne Université

Licence de Physique — Relativité Restreinte

Interrogation Écrite — Corrigé

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Interrogation n°3 : durée 15 minutes

[Total : 10 pts]

1. Quadrivecteurs

1 pt **1.1 —** Rappelez la définition de la vitesse ordinaire $\mathbf{u}$ du mobile M mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ inertiel ; faites de même pour sa vitesse $\mathbf{u}'$ mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, un autre référentiel inertiel. On notera (u_x, u_y, u_z) les composantes de la vitesse $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{R}$, et (u'_x, u'_y, u'_z) les composantes de $\mathbf{u}'$ dans $\mathcal{R}'$.

La vitesse $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{e}_x + u_y\,\mathbf{e}_y + u_z\,\mathbf{e}_z$ du mobile dans $\mathcal{R}$ est simplement la dérivée du vecteur position $\mathbf{r}$ par rapport au temps t dans le référentiel $\mathcal{R}$,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = u_x\,\mathbf{e}_x + u_y\,\mathbf{e}_y + u_z\,\mathbf{e}_z \qquad u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

De même, la vitesse $\mathbf{u}' = u'_x\,\mathbf{e}_x + u'_y\,\mathbf{e}_y + u'_z\,\mathbf{e}_z$ est la dérivée du vecteur position $\mathbf{r}'$ par rapport au temps t' dans le référentiel $\mathcal{R}'$,

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} = u'_x\,\mathbf{e}_x + u'_y\,\mathbf{e}_y + u'_z\,\mathbf{e}_z \qquad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}.$$

2 pts **1.2 —** Donnez la définition du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ (*quadri-vitesse*), de composantes U^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour l'objet étudié ; donnez l'expression de ses 4 composantes U^μ dans le référentiel $\mathcal{R}$ inertiel.

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}$$

$$U^\mu = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t} \\ \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\,c\mathrm{d}t/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\,c \\ \gamma(\mathbf{u})\,u_x \\ \gamma(\mathbf{u})\,u_y \\ \gamma(\mathbf{u})\,u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\,c \\ \gamma(\mathbf{u})\,\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ de composantes $(u_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, u_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t, u_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t)$ et de norme u, vu dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1 pt **1.3 —** Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$ (démontrez-le en faisant explicitement le calcul) ? Est-ce un invariant de Lorentz ?

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})c^2 - \gamma^2(\mathbf{u})\mathbf{u}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})c^2\left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right] = c^2$$

car $\gamma^2(\mathbf{u}) = [1 - \mathbf{u}^2/c^2]^{-1}$. Par construction, $\widetilde{\mathbf{U}}^2$ est le pseudo-produit scalaire d'un quadrivecteur par lui-même : c'est donc un invariant de Lorentz. On le vérifie dans ce cas particulier, car la vitesse de la lumière dans le vide c, et donc c^2 sont justement des invariants relativistes (c'est l'un des deux postulats de la relativité restreinte).

De plus, $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2$ est non seulement un invariant, mais aussi une grandeur constante.

1 pt **1.4 —** Comment les composantes U^μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ se transforment-elles lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez explicitement la transformation.

La quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ est un quadrivecteur : ses composantes (contravariantes) U^μ se transforment donc selon la transformation de Lorentz, qui s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}.$$

1 pt **1.5 —** Rappelez la définition de la quadri-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ d'une particule de masse m, de temps propre τ, de ligne d'univers $\widetilde{\mathbf{r}}(\tau) : r^\mu = (ct, \mathbf{r})$.

2 pts **1.6 —** En déduire les expressions de l'énergie E et de la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$ de la particule de masse m, de vitesse instantanée $\mathbf{u}(t)$. Que vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2$?

2 pts **1.7 —** En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$, l'énergie E et la vitesse $\mathbf{u}(t)$ de la particule de masse m *(4 relations)*.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ comme suit, par analogie avec la mécanique classique :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$ avec E l'énergie totale de l'objet étudié.

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$