SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Lundi 4 novembre 2024 — 13h45 –15h45

Documents, ordinateurs, tablettes et téléphones sont interdits. Les calculatrices (basiques) sont autorisées. Pour bien distinguer les vecteurs des quantités scalaires, vous noterez les vecteurs avec une flèche, car vous ne pouvez pas les écrire en caractères gras comme ici dans l'énoncé.

1. La Fuite du Faucon Millenium

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Après avoir libéré la princesse Leia retenue prisonnière sur l'Étoile Noire (référentiel $\mathcal{R}$), Han Solo, Chewbacca, Luke et leurs amis prennent la fuite à $t = t' = 0$ à bord du Faucon Millenium (référentiel $\mathcal{R}'$). Le Faucon Millenium s'éloigne de l'Étoile Noire à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ (mesurée dans $\mathcal{R}$), qu'on supposera constante, avec $v < c$: dans la précipitation, Han Solo n'a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique.

On négligera la phase de démarrage du Faucon : on fera comme si à $t = 0$ sa vitesse passait de 0 à v en un temps extrêmement bref : après tout, il est question ici du Faucon Millenium, *"le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie"*.

Pour cet exercice, on munira le référentiel $\mathcal{R}$ d'un repère (O, x, y, z), et le référentiel $\mathcal{R}'$ d'un repère (O', x', y', z'), de telle sorte que les axes soient orientés de la même manière dans les deux référentiels ; on choisira les axes (Ox) et $(O'x')$ selon la direction du mouvement du Faucon Millenium. Dans $\mathcal{R}$, on prendra pour origine O la position qu'occupait le Faucon Millenium dans le hangar à vaisseaux à la surface de l'Étoile Noire où il était garé ; dans $\mathcal{R}'$, on prendra un point arbitraire du Faucon comme origine O', de telle sorte que $O \equiv O'$ à $t = t' = 0$.

1.1 — Pour un événement quelconque M, écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui donne les coordonnées (ct', x', y', z') de cet événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau à partir de ses coordonnées (ct, x, y, z) dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire. Vous présenterez aussi ces équations sous forme matricielle. Rappelez les expressions littérales des facteurs β et $\gamma(v)$, et calculez leurs valeurs numériques pour $v = 5c/13$.

Mesure de la vitesse des fuyards

Désireux de rattraper les fuyards, le commandant de l'Étoile Noire ordonne au préalable d'estimer la vitesse du Faucon Millenium. Pour cela, un officier radariste envoie une succession de signaux électromagnétiques (par exemple, des signaux lumineux) très brefs en direction du Faucon : ces signaux sont émis régulièrement et espacés temporellement d'une durée Δt mesurée dans le référentiel de l'étoile Noire.

1.2 — On considère un signal électromagnétique extrêmement bref émis depuis la surface de l'Étoile Noire en direction du vaisseau qui s'éloigne. Lorsqu'il atteint le vaisseau, le rayon se réfléchit sur sa carlingue et repart aussitôt en sens inverse en direction de l'Étoile Noire, avant de parvenir à l'instrument de mesure de l'officier radariste.

On notera E_1 l'événement d'émission du rayon à l'instant $t_1 = t(E_1) > 0$, I_1 l'événement d'impact (et de rebond) du rayon sur le vaisseau, et R_1 l'événement de réception du rayon réfléchi sur l'antenne du radar de l'Étoile Noire.

Établissez les coordonnées (t, x) dans $\mathcal{R}$ des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de $t_1 = t(E_1)$ et v. Vous donnerez les expressions littérales de ces coordonnées.

1.3 — Faites de même dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium, et donnez les expressions des coordonnées (t', x') des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de t_1 et v.

1.4 — On s'intéresse maintenant au signal émis immédiatement après celui émis en E_1 : autrement dit, au signal émis à $t = t(E_1) + \Delta t = t_1 + \Delta t$. On notera l'événement d'émission de ce signal E_2, l'impact sur le vaisseau I_2, et la réception du signal réfléchi sur l'antenne radar R_2. Comme précédemment, établissez les coordonnées (t, x) dans le référentiel $\mathcal{R}$ de ces 3 événements, ainsi que leurs coordonnées (t', x') dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau, en fonction de t_1, Δt et v.

1.5 — Donnez l'expression de la durée qui s'écoule entre les événements d'impact I_1 et I_2, dans le référentiel de l'Étoile Noire, et dans le référentiel du vaisseau.

1.6 — Quelle est la durée $\Delta t_R = t(R_2) - t(R_1)$ entre les événements R_1 et R_2 de réception de deux signaux successifs sur l'antenne radar de l'Étoile Noire ?

1.7 — La connaissance de la durée entre les signaux émis, et la mesure de la durée entre les signaux reçus permet d'en déduire la vitesse v du vaisseau. Exprimez cette vitesse v en fonction de Δt et de Δt_R.

1.8 — En considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent plutôt à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν (dans $\mathcal{R}$), quelle est la fréquence ν' de cette même onde électromagnétique dans le référentiel du vaisseau, au moment de l'impact de l'onde sur le vaisseau ? Montrez que vous retrouvez ainsi l'expression de l'effet Doppler relativiste.

1.9 — Toujours en considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν, donnez l'expression de la fréquence ν_R du signal reçu par l'antenne radar. Déduisez-en une expression de la vitesse v du vaisseau en fonction de la fréquence émise ν et reçue ν_R.

1.10 — On suppose que le radar de l'Étoile Noire émet à la fréquence $\nu = 1\,\text{GHz}$. Donnez la valeur numérique de la fréquence ν_R.

Tir Laser

L'officier commandant l'Étoile Noire envoie un chasseur (*TIE fighter*) à la poursuite des dangereux rebelles qui fuient à bord du Faucon Millenium. Malheureusement, le chasseur subit une avarie quelques instants avant de rejoindre les fuyards, leur permettant ainsi de poursuivre leur chemin sans encombre.

Dépité devant tant de malchance, et légèrement agacé par les faveurs scénaristiques qui permettent à chaque fois à nos héros de s'en sortir de manière invraisemblable, le commandant de l'Étoile Noire décide d'utiliser les grands moyens : il ordonne d'activer à l'instant $t = t_{\text{tir}} > 0$ l'arme suprême de sa station, à savoir le puissant laser de l'Étoile Noire, et d'effectuer un tir en direction du vaisseau pour en finir une fois pour toutes avec ces rebelles trop favorisés par le scénario.

1.11 — Quelle est la vitesse de propagation du laser dans le référentiel de l'Étoile Noire ? Dans le référentiel du Faucon Millenium ? (On suppose ici que le faisceau laser se propage dans le vide).

1.12 — On considère que le laser émet à la fréquence $\nu = 600\,\text{THz}$ dans $\mathcal{R}$. Quelle est sa longueur d'onde d'émission λ dans $\mathcal{R}$? À quel domaine de longueur d'onde cela correspond-il ? Quelle est la couleur du laser vu depuis l'Étoile Noire ?

1.13 — À l'instant de l'impact t_{impact} du faisceau laser sur le Faucon Millenium, quelle est la longueur d'onde λ' du faisceau reçu par les passagers du vaisseau ? À quelle couleur cela correspond-il pour les passagers ?

Diagramme d'espace-temps

1.14 — Représentez toutes les péripéties de cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Vous représenterez l'ensemble des événements évoqués dans l'exercice sur le même diagramme d'espace-temps. Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

Les péripéties décrites ici s'inspirent librement de la scène 39 du film "Star Wars : A New Hope" (1977) de George Lucas. Aucun personnage de George Lucas n'a été maltraité pendant la préparation de cet exercice.

Données :

Vitesse du Faucon Millenium, vaisseau des rebelles : $v = 5c/13$

Vitesse du chasseur impérial (*TIE Fighter*) : $u = 12c/13$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Rappels :

On rappelle l'équation de l'effet Doppler relativiste (cas longitudinal) : soit un signal électromagnétique de longueur d'onde λ émis *vers l'avant* dans le référentiel $\mathcal{R}$; dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le même signal a pour longueur d'onde λ' avec :

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

avec $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ et $\beta = v/c$.

Exprimée en termes de fréquence, la relation devient :

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{avec} \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{et} \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'}$$

où ν est la fréquence du signal émis dans $\mathcal{R}$ et ν' la fréquence du même signal lorsqu'il est reçu dans $\mathcal{R}'$.

2. Dynamique dans la Station Spatiale Internationale (ISS)

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Vitesse de rotation d'un satellite en orbite circulaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre. On supposera son orbite circulaire, de rayon r_s (fig. 1). Par symétrie, dans ce cas particulier la vitesse angulaire de rotation ω est constante. On souhaite dans cette première partie établir l'expression de la vitesse angulaire de rotation ω du satellite en fonction du rayon r_s de son orbite.

Pour cette première partie, on se place dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, dont l'origine est au centre O de la Terre, et dont les axes sont définis par des étoiles lointaines. On choisira nos axes de telle sorte que l'orbite soit dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

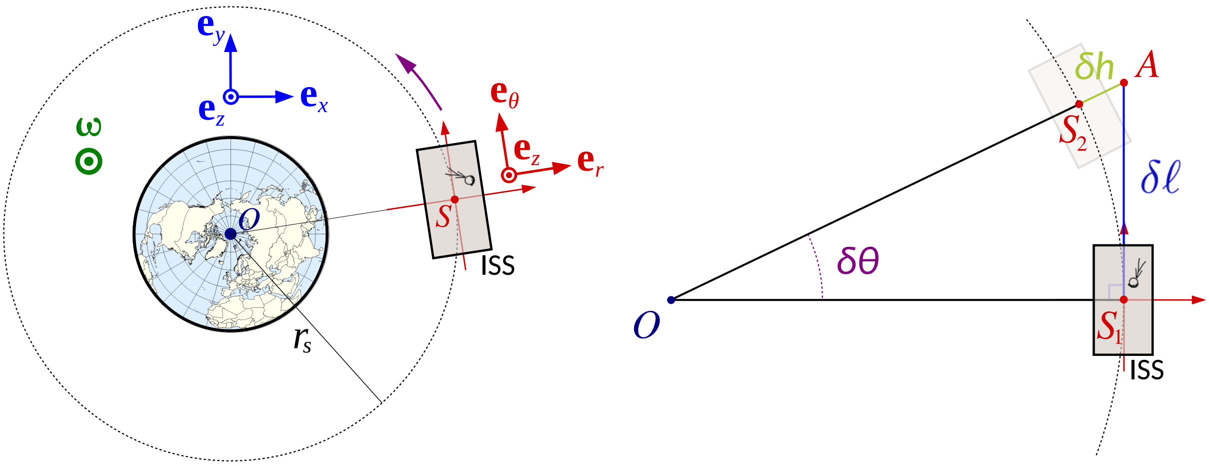

FIGURE 1 – *À gauche, orbite schématisée du satellite. À droite, mouvement du satellite sur son orbite pendant δt : initialement à la position S_1, il parcourt un angle infinitésimal $\delta\theta$ sur son orbite circulaire et atteint la position suivante S_2. Ce mouvement peut être vu comme la combinaison d'un déplacement infinitésimal $\delta\ell$ en ligne droite et un déplacement infinitésimal δh de chute libre vers le centre O de la Terre.*

La légende raconte qu'Isaac Newton a découvert la loi de la gravitation universelle en observant la chute d'une pomme (fig. 3). Considérant la pomme qui tombe, puis la Lune qui orbite autour de la Terre, Isaac Newton imagine que la Lune doit elle aussi subir l'attraction gravitationnelle de la Terre, et que, comme la pomme, elle tombe à chaque instant vers le centre de la Terre. Nous allons appliquer ce raisonnement à un satellite quelconque (un satellite naturel comme la Lune, ou un satellite artificiel), en nous restreignant ici au cas le plus simple d'une orbite circulaire.

Pendant un intervalle infinitésimal de temps δt, le satellite, initialement à la position S_1, parcourt un angle infinitésimal $\delta\theta$ sur son orbite circulaire. On peut, comme Newton, considérer que ce mouvement est la combinaison d'un déplacement infinitésimal $\delta\ell$ en ligne droite (le mouvement que le satellite effectuerait en l'absence d'attraction gravitationnelle, d'après le principe d'inertie), et un déplacement infinitésimal δh de chute libre (mouvement accéléré uniformément) vers le centre O de la Terre (fig. 1). La combinaison de ces deux déplacements infinitésimaux amène le satellite à sa position suivante S_2 sur son orbite circulaire.

2.1 — Exprimez l'angle $\delta\theta$ en fonction de δt et de la vitesse angulaire de rotation ω du satellite.

2.2 — Que valent les distances OS_1 et OS_2 ? Exprimez la distance OA en fonction de r_s et de $\delta\theta$.

2.3 — Déduisez-en la distance $\delta h = AS_2$, et exprimez la en fonction de r_s et de $\delta\theta$.

2.4 — En effectuant un développement limité en $\delta\theta$, exprimez δh en fonction de r_s et de $(\delta\theta)^2$.

On rappelle que la force d'attraction gravitationnelle terrestre que subit un mobile M de masse m s'écrit :

$$\mathbf{F}_\oplus = m\mathbf{G}_\oplus(M)$$

où $\mathbf{G}_\oplus(M)$ est le champ gravitationnel terrestre au point M, qu'on peut écrire :

$$\mathbf{G}_\oplus(M) = -\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{OM^2}\frac{\mathbf{OM}}{OM} = -\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r^2}\,\mathbf{e}_r = -G_\oplus(M)\,\mathbf{e}_r \qquad \text{(Loi de la gravitation universelle)}$$

2.5 — Sous l'effet de l'accélération $G_\oplus(S)$ qu'on peut considérer comme constante pendant δt, de quelle hauteur δh le satellite initialement en S tombe-t-il (chute libre) dans la direction du centre de la Terre ? Donnez ainsi une seconde expression de δh en fonction de $\mathcal{G}$, $m_\oplus$, r_s et $(\delta t)^2$.

2.6 — À partir des deux expressions obtenues pour δh, montrez que la vitesse de rotation angulaire ω du satellite vérifie :

$$\omega^2 = \mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^3}.$$

2.7 — Exprimez la période de révolution $\mathcal{T}$ du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, $m_\oplus$ et r_s.

2.8 — Exprimez $\mathcal{T}^2$ en fonction de r_s^3. Quelle loi célèbre reconnaissez-vous ?

Dynamique à bord de l'ISS

On s'intéresse au cas particulier de la Station Spatiale Internationale, en orbite autour de la Terre à une altitude moyenne $h = h_{\text{ISS}} \approx 415\,\text{km}$ au-dessus du niveau de la mer. L'orbite de l'ISS est quasi-circulaire. On notera $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ le référentiel solidaire de l'ISS, dont on placera l'origine S au centre de l'un des modules de la station ; on choisira un trièdre $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ selon les directions principales de la station (figures 1 et 2).

2.9 — Donnez l'expression, puis la valeur numérique de la vitesse angulaire de rotation ω_{ISS} de la Station Spatiale Internationale dans $\mathcal{R}_g$. Déduisez-en la période de révolution $\mathcal{T}_{\text{ISS}}$ de l'ISS autour de la Terre.

2.10 — Le référentiel $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ solidaire de l'ISS est-il inertiel/galiléen ? Justifiez.

2.11 — En utilisant la relation de Varignon, montrez que la vitesse $\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g}$ de l'origine S dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ s'écrit :

$$\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}$$

Déduisez-en une expression de sa norme $u_{S/\mathcal{R}_g}$ en fonction de ω_{ISS} et h_{ISS}. Application numérique.

2.12 — En utilisant ce qui précède, montrez que :

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS})$$

déduisez de ce qui précède une expression du vecteur accélération $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$ de l'origine S de $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ en fonction de ω_{ISS} et h_{ISS}. Application numérique pour la norme de $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$.

2.13 — Le cosmonaute Thomas Pesquet (de masse $m_{\text{TP}} = 84\,\text{kg}$) flotte immobile au centre S du module *Zarya* ("aube" en russe). Dans le référentiel de l'ISS, faites le bilan des forces (et éventuelles pseudo-forces) qui s'exercent sur Thomas Pesquet. Donnez l'expression de chaque force ou pseudo-force, et calculez explicitement la résultante de ces forces.

2.14 — Qu'en déduisez-vous ? Que ressent Thomas Pesquet ?

2.15 — Depuis le centre S du module *Zarya*, Thomas Pesquet lance une balle de tennis dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ (de la poupe vers la proue, *i.e.* d'arrière en avant), avec une vitesse initiale $u_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}(t = 0) = u_0 = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Donnez l'expression de l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_\text{c}$, ainsi que de la force de Coriolis $\mathbf{F}_\text{c}$ qui s'exerce sur la balle. Faites un schéma où vous représenterez la balle de tennis, sa vitesse initiale, $\mathbf{a}_\text{c}$ et $\mathbf{F}_\text{c}$. Application numérique pour l'accélération de Coriolis. Commentez.

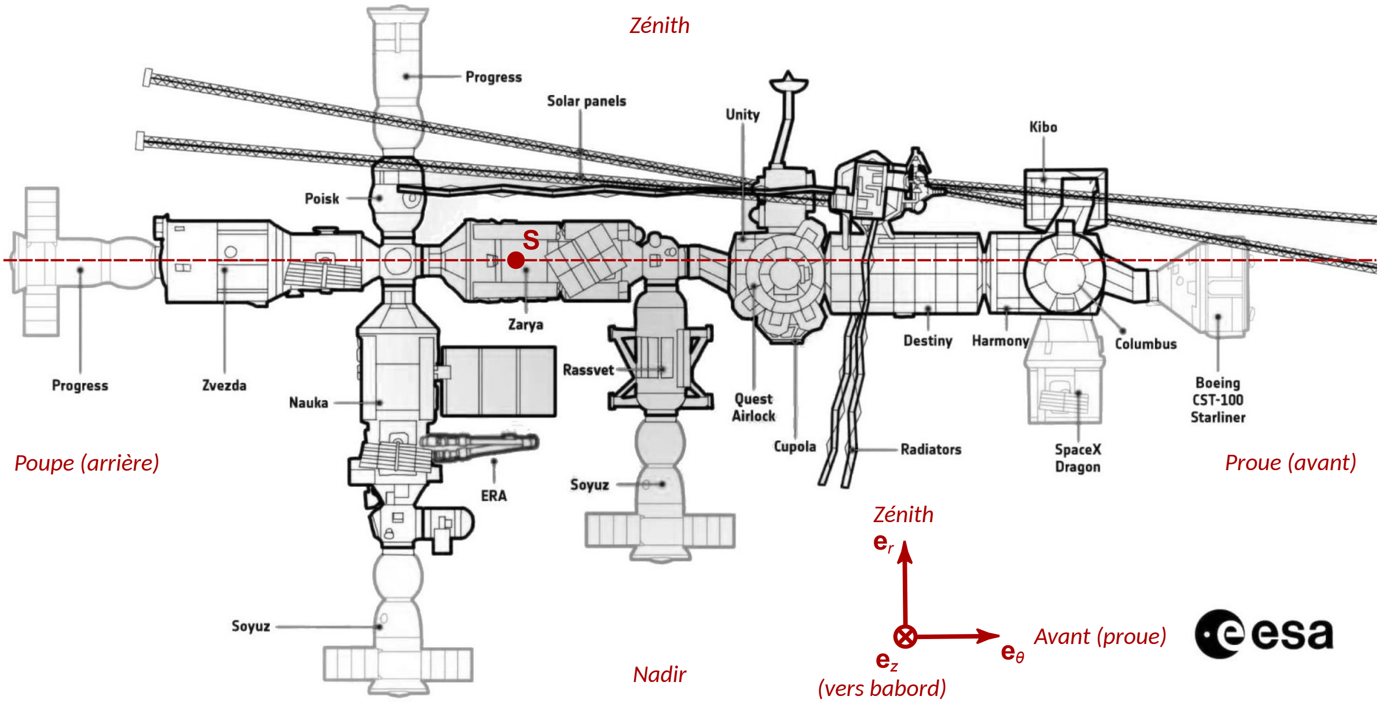

FIGURE 2 – *Schéma de la Station Spatiale Internationale (ISS), vue depuis tribord (côté droit quand on regarde vers l'avant sur un navire ou un aéronef).*

Données : Constante de Gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67430(15)\times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$

Masse de la Terre : $m_\oplus = 5.9722\times 10^{24}\,\text{kg}$ Rayon moyen (volumétrique) : $R_\oplus = 6371\,\text{km}$

Masse totale de l'ISS : $m_{\text{ISS}} = 450$ tonnes Altitude moyenne de l'ISS : $h_{\text{ISS}} \approx 415\,\text{km}$

Masse de Thomas Pesquet : $m_{\text{TP}} = 84\,\text{kg}$

Quelques développements limités utiles (autour de zéro) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \mathcal{O}(x^3)$$

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen et un référentiel $\mathcal{R}'$ non-galiléen. Généralisation de la deuxième loi de Newton (RFD). Pseudo-forces inertielles. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r'}(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{\mathrm{e}} + \mathbf{a}_{\mathrm{c}}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_{\mathrm{e}}$ et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_{\mathrm{c}} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$

Si on considère un mobile M de masse m dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la deuxième loi de Newton (RFD) se généralise sous la forme :

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} - m\,\mathbf{a}_{\mathrm{e}} - m\,\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = \sum \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + \mathbf{F}_{\mathrm{e}} + \mathbf{F}_{\mathrm{c}}$$

avec $\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = -m\,\mathbf{a}_{\mathrm{e}}$ la force inertielle d'entraînement et $\mathbf{F}_{\mathrm{c}} = -m\,\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ la force inertielle de Coriolis.

Double produit vectoriel. Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel : si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont trois vecteurs quelconques, alors :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\ \mathbf{C}.$$

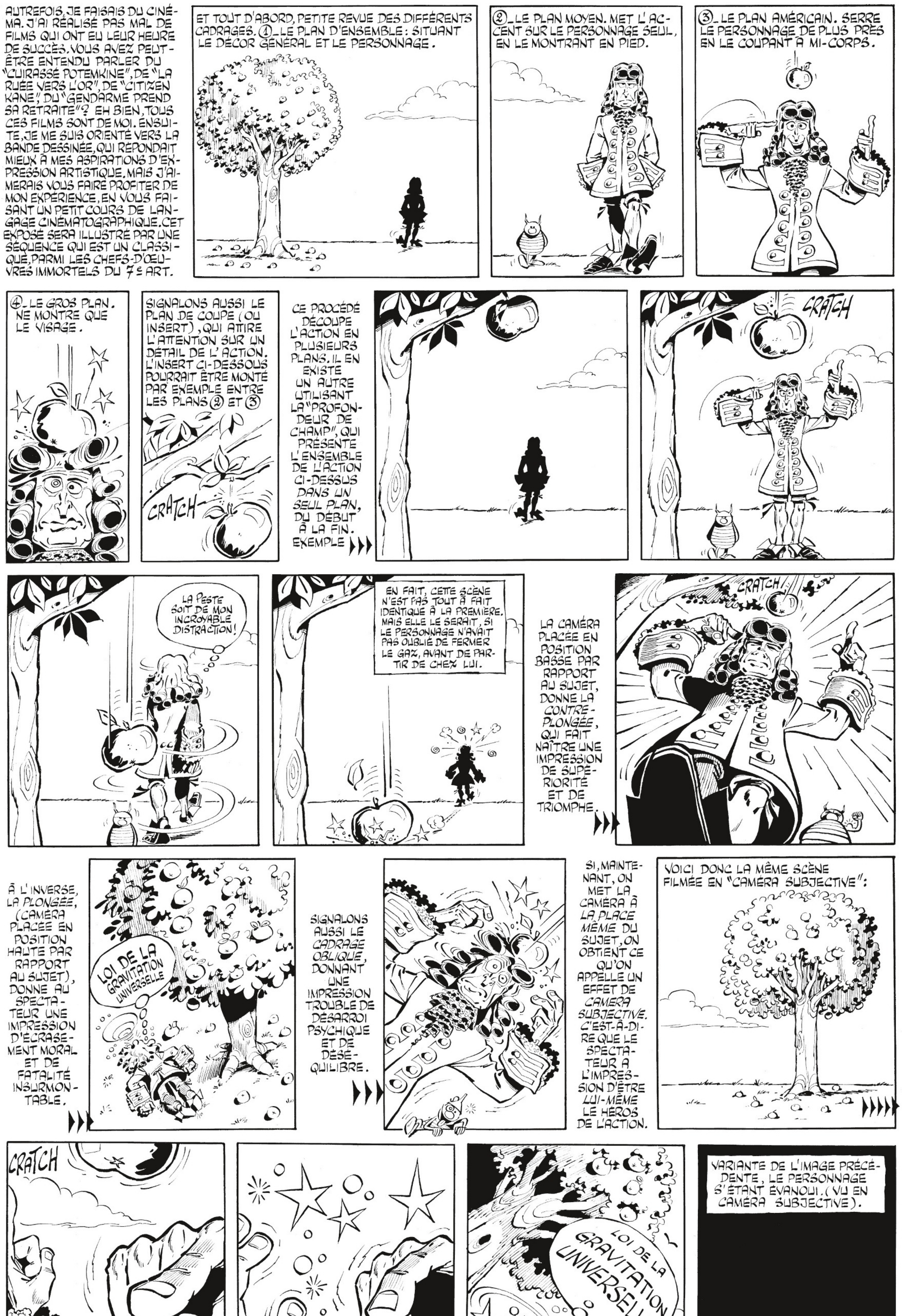

FIGURE 3 – *La légende raconte qu'Isaac Newton eut l'idée de la théorie de la Gravitation Universelle en observant la chute d'une pomme. L'anecdote, célèbre, a notamment inspiré Marcel Gottlieb (dit "Gotlib", 1934–2016) qui en a fait un gag récurrent, Isaac Newton recevant régulièrement sur la tête des pommes, mais aussi les objets les plus divers : mouette, piano, pélican, etc. Extrait de "Rubrique-à-Brac" (1968-1972) où Gotlib utilise l'anecdote pour illustrer les différents cadrages cinématographiques.*