LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Lundi 4 novembre 2024 — 13h45 –15h45

1. La Fuite du Faucon Millenium

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Après avoir libéré la princesse Leia retenue prisonnière sur l'Étoile Noire (référentiel $\mathcal{R}$), Han Solo, Chewbacca, Luke et leurs amis prennent la fuite à $t = t' = 0$ à bord du Faucon Millenium (référentiel $\mathcal{R}'$). Le Faucon Millenium s'éloigne de l'Étoile Noire à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ (mesurée dans $\mathcal{R}$), qu'on supposera constante, avec $v < c$: dans la précipitation, Han Solo n'a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique.

On négligera la phase de démarrage du Faucon : on fera comme si à $t = 0$ sa vitesse passait de 0 à v en un temps extrêmement bref : après tout, il est question ici du Faucon Millenium, *"le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie"*.

Pour cet exercice, on munira le référentiel $\mathcal{R}$ d'un repère (O, x, y, z), et le référentiel $\mathcal{R}'$ d'un repère (O', x', y', z'), de telle sorte que les axes soient orientés de la même manière dans les deux référentiels ; on choisira les axes (Ox) et $(O'x')$ selon la direction du mouvement du Faucon Millenium. Dans $\mathcal{R}$, on prendra pour origine O la position qu'occupait le Faucon Millenium dans le hangar à vaisseaux à la surface de l'Étoile Noire où il était garé ; dans $\mathcal{R}'$, on prendra un point arbitraire du Faucon comme origine O', de telle sorte que $O \equiv O'$ à $t = t' = 0$.

1.1 — Pour un événement quelconque M, écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui donne les coordonnées (ct', x', y', z') de cet événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau à partir de ses coordonnées (ct, x, y, z) dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire. Vous présenterez aussi ces équations sous forme matricielle. Rappelez les expressions littérales des facteurs β et $\gamma(v)$, et calculez leurs valeurs numériques pour $v = 5c/13$.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\left\{\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{\begin{aligned} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right.$$

$$\text{où on pose :}\quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Numériquement, avec $v = 5c/13$, on trouve :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{5}{13} \approx 0.385 \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{25}{169}}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12} \approx 1.083.$$

Mesure de la vitesse des fuyards

Désireux de rattraper les fuyards, le commandant de l'Étoile Noire ordonne au préalable d'estimer la vitesse du Faucon Millenium. Pour cela, un officier radariste envoie une succession de signaux électromagnétiques (par exemple, des signaux lumineux) très brefs en direction du Faucon : ces signaux sont émis régulièrement et espacés temporellement d'une durée Δt mesurée dans le référentiel de l'étoile Noire.

1.2 — On considère un signal électromagnétique extrêmement bref émis depuis la surface de l'Étoile Noire en direction du vaisseau qui s'éloigne. Lorsqu'il atteint le vaisseau, le rayon se réfléchit sur sa carlingue et repart aussitôt en sens inverse en direction de l'Étoile Noire, avant de parvenir à l'instrument de mesure de l'officier radariste.

On notera E_1 l'événement d'émission du rayon à l'instant $t_1 = t(E_1) > 0$, I_1 l'événement d'impact (et de rebond) du rayon sur le vaisseau, et R_1 l'événement de réception du rayon réfléchi sur l'antenne du radar de l'Étoile Noire.

Établissez les coordonnées (t, x) dans $\mathcal{R}$ des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de $t_1 = t(E_1)$ et v. Vous donnerez les expressions littérales de ces coordonnées.

De manière immédiate, l'événement E_1 se produit dans le référentiel $\mathcal{R}$ sur l'Étoile Noire, en $x(E_1) = 0$. Il en est de même pour l'événement R_1 de réception du signal : $x(R_1) = 0$.

Le rayon émis se propage à la vitesse c dans $\mathcal{R}$ (comme dans $\mathcal{R}'$) ; il atteint le Faucon à $t(I_1)$ quand son abscisse est égale à celle du Faucon, c'est à dire lorsque :

$$c\,[t(I_1) - t(E_1)] = v\,[t(I_1) - 0] = vt(I_1) \qquad \textit{i.e.} \qquad t(I_1) = \frac{c}{c-v}\,t(E_1) = \frac{c}{c-v}\,t_1.$$

L'impact du signal sur le Faucon se produit à $t(I_1)$, à l'abscisse :

$$x(I_1) = vt(I_1) = \frac{vc}{c-v}\,t_1.$$

Après l'impact, le signal réfléchi se propage en sens inverse, et atteint l'Étoile Noire à l'instant $t(R_1)$, qui vérifie :

$$t(R_1) = t(I_1) + \frac{x(I_1)}{c} = \frac{c+v}{c-v}\,t_1.$$

Les coordonnées (t,x) des événements E_1, I_1 et R_1 dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire sont ainsi :

$$E_1 : (t_1, 0) \qquad I_1 : \left(\frac{c}{c-v}\, t_1, \frac{vc}{c-v}\, t_1\right) \qquad R_1 : \left(\frac{c+v}{c-v}\, t_1, 0\right).$$

1.3 — Faites de même dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium, et donnez les expressions des coordonnées (t', x') des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de t_1 et v.

On obtient les coordonnées des événements dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium à partir de leurs coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}$ en utilisant la transformation de Lorentz entre ces deux référentiels :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} t' &= \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \end{cases}$$

où $\beta = v/c$ et $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Dans $\mathcal{R}'$, l'événement E_1 d'émission du signal se produit ainsi aux coordonnées :

$$t'(E_1) = \gamma\left[t(E_1) - \frac{vx(E_1)}{c^2}\right] = \gamma t_1 \qquad \text{et} \qquad x'(E_1) = \gamma\left[x(E_1) - vt(E_1)\right] = -\gamma v t_1.$$

De même, les coordonnées de l'événement I_1 d'impact du signal sur le Faucon sont, dans $\mathcal{R}'$:

$$t'(I_1) = \gamma\left[t(I_1) - \frac{vx(I_1)}{c^2}\right] = \gamma\left[\frac{c}{c-v}\, t_1 - \frac{v}{c^2}\frac{vc}{c-v}\, t_1\right] = \gamma\,\frac{c}{c-v}\, t_1\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\, t_1.$$

Et pour $x'(I_1)$, on trouve naturellement $x'(I_1) = 0$ car l'événement I_1 se produit à la position du Faucon :

$$x'(I_1) = \gamma\left[x(I_1) - vt(I_1)\right] = \gamma\left[\frac{vc}{c-v}\, t_1 - \frac{vc}{c-v}\, t_1\right] = 0.$$

Enfin, les coordonnées de l'événement R_1 de réception du signal sont, dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$t'(R_1) = \gamma\left[t(R_1) - \frac{vx(R_1)}{c^2}\right] = \gamma t(R_1) = \gamma\,\frac{c+v}{c-v}\, t_1 \quad \text{et} \quad x'(R_1) = \gamma\left[x(R_1) - vt(R_1)\right] = -\gamma v\,\frac{c+v}{c-v}\, t_1.$$

Les coordonnées (t', x') des événements E_1, I_1 et R_1 dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium sont donc :

$$E_1 : \left(\gamma t_1, -\gamma v t_1\right) \qquad I_1 : \left(\frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\, t_1, 0\right) \qquad R_1 : \left(\gamma\,\frac{c+v}{c-v}\, t_1, -\gamma v\,\frac{c+v}{c-v}\, t_1\right).$$

1.4 — On s'intéresse maintenant au signal émis immédiatement après celui émis en E_1 : autrement dit, au signal émis à $t = t(E_1) + \Delta t = t_1 + \Delta t$. On notera l'événement d'émission de ce signal E_2, l'impact sur le vaisseau I_2, et la réception du signal réfléchi sur l'antenne radar R_2. Comme précédemment, établissez les coordonnées (t,x) dans le référentiel $\mathcal{R}$ de ces 3 événements, ainsi que leurs coordonnées (t', x') dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau, en fonction de t_1, Δt et v.

Le calcul est similaire à celui effectué pour les événements E_1, I_1 et R_1 : il suffit de remplacer t_1 dans les expressions précédentes par $t_1 + \Delta t$.

On obtient ainsi, de manière immédiate, les coordonnées des événements E_2, I_2 et R_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire :

$$E_2 : (t_1 + \Delta t, 0) \qquad I_2 : \left(\frac{c}{c-v}\,(t_1+\Delta t), \frac{vc}{c-v}\,(t_1+\Delta t)\right) \qquad R_2 : \left(\frac{c+v}{c-v}\,(t_1+\Delta t), 0\right).$$

De même, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium, les coordonnées des événements E_2, I_2 et R_2 sont :

$$E_2\colon \Big(\gamma(t_1+\Delta t), -\gamma v(t_1+\Delta t)\Big) \qquad I_2 : \left(\frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\,(t_1+\Delta t), 0\right)$$
$$R_2\colon \left(\gamma\,\frac{c+v}{c-v}\,(t_1+\Delta t), -\gamma v\,\frac{c+v}{c-v}\,(t_1+\Delta t)\right).$$

1.5 — Donnez l'expression de la durée qui s'écoule entre les événements d'impact I_1 et I_2, dans le référentiel de l'Étoile Noire, et dans le référentiel du vaisseau.

D'après ce qui précède, la durée $\Delta t_I = t(I_2) - t(I_1)$ écoulée entre les deux impacts successifs I_1 et I_2 sur le Faucon, mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, vaut :

$$\Delta t_I = t(I_2) - t(I_1) = \frac{c}{c-v}\,(t_1+\Delta t) - \frac{c}{c-v}\,t_1 = \frac{c}{c-v}\,\Delta t.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium, la durée qui écoulée entre les mêmes événements I_1 et I_2 est :

$$\Delta t'_I = t'(I_2) - t'(I_1) = \frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\,(t_1+\Delta t) - \frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\,t_1 = \frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\,\Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t_I \leqslant \Delta t_I.$$

Les événements I_1 et I_2 appartenant tous deux à la ligne d'univers du Faucon Millenium, la durée $\Delta t'_I$ correspond à un intervalle de temps propre dans le référentiel du Faucon. La durée Δt_I entre les mêmes événements mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$ est plus longue (dilatation du temps).

1.6 — Quelle est la durée $\Delta t_R = t(R_2) - t(R_1)$ entre les événements R_1 et R_2 de réception de deux signaux successifs sur l'antenne radar de l'Étoile Noire ?

En utilisant les coordonnées établies précédemment, on a de manière immédiate, dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire :

$$\Delta t_R = t(R_2) - t(R_1) = \frac{c+v}{c-v}\,(t_1+\Delta t) - \frac{c+v}{c-v}\,t_1 = \frac{c+v}{c-v}\,\Delta t.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon, la durée écoulée entre les événements R_1 et R_2 s'écrit :

$$\Delta t'_R = t'(R_2) - t'(R_1) = \gamma\,\frac{c+v}{c-v}\,(t_1+\Delta t) - \gamma\,\frac{c+v}{c-v}\,t_1 = \gamma\,\frac{c+v}{c-v}\,\Delta t = \gamma\,\Delta t_R \geqslant \Delta t_R.$$

Cette fois, les événements R_1 et R_2 appartiennent à la ligne d'univers de l'Étoile Noire ; l'intervalle de temps qui les sépare est un intervalle de temps propre dans le référentiel $\mathcal{R}$. La durée $\Delta t'_R$ entre les mêmes événements mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est plus longue (dilatation du temps).

1.7 — La connaissance de la durée entre les signaux émis, et la mesure de la durée entre les signaux reçus permet d'en déduire la vitesse v du vaisseau. Exprimez cette vitesse v en fonction de Δt et de Δt_R.

On a établi précédemment la relation entre la vitesse v du Faucon, l'intervalle de temps Δt qui sépare deux événements successifs d'émission, mesuré dans le référentiel $\mathcal{R}$, et la durée Δt_R entre deux événements successifs de réception, toujours mesurée dans $\mathcal{R}$:

$$\Delta t_R = t(R_2) - t(R_1) = \frac{c+v}{c-v}\,\Delta t.$$

Si on connaît Δt et qu'on mesure Δt_R, on peut en déduire une estimation de la vitesse v du vaisseau rebelle :

$$(c-v)\Delta t_R = (c+v)\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad c(\Delta t_R - \Delta t) = v(\Delta t_R + \Delta t) \qquad \textit{i.e.} \qquad v = c\,\frac{\Delta t_R - \Delta t}{\Delta t_R + \Delta t}.$$

1.8 — En considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent plutôt à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν (dans $\mathcal{R}$), quelle est la fréquence ν' de cette même onde électromagnétique dans le référentiel du vaisseau, au moment de l'impact de l'onde sur le vaisseau ? Montrez que vous retrouvez ainsi l'expression de l'effet Doppler relativiste.

Si les événements E_1 et E_2 correspondent à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une onde électromagnétique de fréquence ν dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire, la durée Δt entre E_1 et E_2 est par conséquent la *période* de l'onde, et on a $\nu = 1/\Delta t$.

De même, la fréquence ν' mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau rebelle est l'inverse du temps écoulé entre les événements d'impact I_1 et I_2, temps mesuré dans $\mathcal{R}'$, et cette fréquence ν' s'écrit simplement $\nu' = 1/\Delta t'_I$.

D'après les résultats établis précédemment, on a :

$$\Delta t'_I = t'(I_2) - t'(I_1) = \frac{1}{\gamma}\frac{c}{c-v}\,\Delta t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{1}{1-\dfrac{v}{c}}\,\Delta t = \sqrt{\frac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}}}\,\Delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\Delta t.$$

Soit, exprimé en termes de fréquence :

$$\nu' = \frac{1}{\Delta t'_I} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\frac{1}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu \qquad \textit{i.e.} \qquad \nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

On retrouve l'expression de ***l'effet Doppler relativiste*** (effet Doppler longitudinal).

1.9 — Toujours en considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν, donnez l'expression de la fréquence ν_R du signal reçu par l'antenne radar. Déduisez-en une expression de la vitesse v du vaisseau en fonction de la fréquence émise ν et reçue ν_R.

Si R_1 et R_2 sont les événements de réception de l'Étoile Noire de deux maxima d'amplitude successifs de l'onde électromagnétique émise, puis réfléchie sur le vaisseau, la fréquence ν_R de réception, mesurée en $\mathcal{R}$, est simplement l'inverse de la durée Δt_R entre R_1 et R_2, mesurée elle aussi dans le référentiel $\mathcal{R}$: on a donc $\nu_R = 1/\Delta t_R$. On a établi précédemment la relation entre Δt, Δt_R et v :

$$\Delta t_R = \frac{c+v}{c-v}\,\Delta t.$$

On en déduit la relation entre fréquence émise ν et fréquence reçue ν_R :

$$\nu_R = \frac{1}{\Delta t_R}\,\frac{c-v}{c+v}\,\frac{1}{\Delta t} \qquad \textit{i.e.} \qquad \nu_R = \nu\,\frac{c-v}{c+v} = \nu\,\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

On reconnaît qu'il s'agit ici de deux applications successives de l'effet Doppler relativiste :

$$\nu_R = \nu'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu\,\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

De la connaissance de la fréquence ν du signal émis et de la mesure de la fréquence reçue, on déduit une estimation de la vitesse v du vaisseau :

$$v = c\,\frac{\nu - \nu_R}{\nu + \nu_R}.$$

Il est à noter que c'est le principe de fonctionnement des radars routiers.

1.10 — On suppose que le radar de l'Étoile Noire émet à la fréquence $\nu = 1\,\text{GHz}$. Donnez la valeur numérique de la fréquence ν_R.

Si la fréquence d'émission du radar est $\nu = 1\,\text{GHz}$, on trouve, numériquement,

$$\nu_R = \nu\,\frac{1-\beta}{1+\beta} = 1\,\text{GHz} \times \frac{1 - \dfrac{5}{13}}{1 + \dfrac{5}{13}} = 1\,\text{GHz} \times \frac{13-5}{13+5} = \frac{4}{9}\,\text{GHz} \approx 0.44\,\text{GHz}.$$

Tir Laser

L'officier commandant l'Étoile Noire envoie un chasseur (*TIE fighter*) à la poursuite des dangereux rebelles qui fuient à bord du Faucon Millenium. Malheureusement, le chasseur subit une avarie quelques instants avant de rejoindre les fuyards, leur permettant ainsi de poursuivre leur chemin sans encombre.

Dépité devant tant de malchance, et légèrement agacé par les faveurs scénaristiques qui permettent à chaque fois à nos héros de s'en sortir de manière invraisemblable, le commandant de l'Étoile Noire décide d'utiliser les grands moyens : il ordonne d'activer à l'instant $t = t_{\text{tir}} > 0$ l'arme suprême de sa station, à savoir le puissant laser de l'Étoile Noire, et d'effectuer un tir en direction du vaisseau pour en finir une fois pour toutes avec ces rebelles trop favorisés par le scénario.

1.11 — Quelle est la vitesse de propagation du laser dans le référentiel de l'Étoile Noire ? Dans le référentiel du Faucon Millenium ? (On suppose ici que le faisceau laser se propage dans le vide).

On suppose ici que le faisceau laser se propage dans le vide. La vitesse de la lumière dans le vide valant $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans tous les référentiels galiléens, c'est le cas ici dans le référentiel $\mathcal{R}$ comme dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (c'est justement l'un des deux postulats de la Relativité Restreinte).

1.12 — On considère que le laser émet à la fréquence $\nu = 600\,\text{THz}$ dans $\mathcal{R}$. Quelle est sa longueur d'onde d'émission λ dans $\mathcal{R}$? À quel domaine de longueur d'onde cela correspond-il ? Quelle est la couleur du laser vu depuis l'Étoile Noire ?

Le faisceau laser se propage ici dans le vide. La longueur d'onde λ associée à la fréquence $\nu = 600\,\text{THz}$ est donc, dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'Étoile Noire :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{600 \times 10^{12}\,\text{Hz}} \approx 500\,\text{nm}$$

ce qui correspond à une émission dans le domaine visible, de couleur bleu-vert.

1.13 — À l'instant de l'impact t_{impact} du faisceau laser sur le Faucon Millenium, quelle est la longueur d'onde λ' du faisceau reçu par les passagers du vaisseau ? À quelle couleur cela correspond-il pour les passagers ?

Comme le Faucon s'éloigne à la vitesse $v = 5c/13$ de l'Étoile Noire, la longueur d'onde du faisceau laser perçue par les passagers du vaisseau sera décalée vers le rouge, du fait de l'effet Doppler. La longueur d'onde λ' observée à bord sera :

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

soit, numériquement,

$$\lambda' \approx 500\,\mathrm{nm} \times \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}}} = 500\,\mathrm{nm} \times \sqrt{\frac{13+5}{13-5}} = 500\,\mathrm{nm} \times \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \times 500\,\mathrm{nm} = 750\,\mathrm{nm}$$

ce qui correspond à une lumière de couleur rouge.

Diagramme d'espace-temps

1.14 — Représentez toutes les péripéties de cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Vous représenterez l'ensemble des événements évoqués dans l'exercice sur le même diagramme d'espace-temps. Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

Voir figure 1.

Les péripéties décrites ici s'inspirent librement de la scène 39 du film "Star Wars : A New Hope" (1977) de George Lucas. Aucun personnage de George Lucas n'a été maltraité pendant la préparation de cet exercice.

Données :

Vitesse du Faucon Millenium, vaisseau des rebelles : $v = 5c/13$

Vitesse du chasseur impérial (*TIE Fighter*) : $u = 12c/13$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Rappels :

On rappelle l'équation de l'effet Doppler relativiste (cas longitudinal) : soit un signal électromagnétique de longueur d'onde λ émis *vers l'avant* dans le référentiel $\mathcal{R}$; dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le même signal a pour longueur d'onde λ' avec :

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

avec $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ et $\beta = v/c$.

Exprimée en termes de fréquence, la relation devient :

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{avec} \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{et} \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'}$$

où ν est la fréquence du signal émis dans $\mathcal{R}$ et ν' la fréquence du même signal lorsqu'il est reçu dans $\mathcal{R}'$.

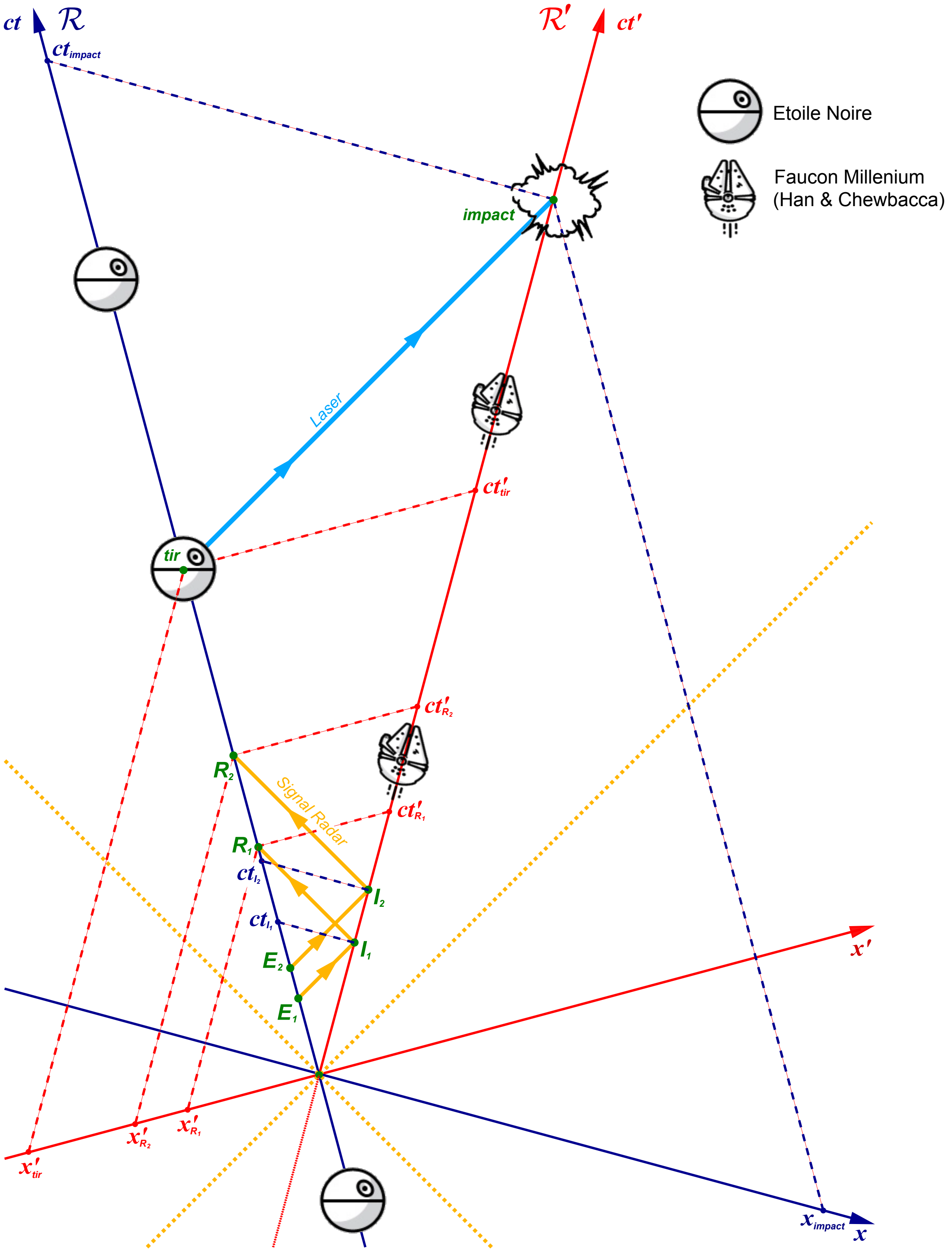

FIGURE 1 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel). La ligne d'Univers de l'Étoile Noire est dessinée en bleu (axe ct du référentiel $\mathcal{R}$), tandis que celle du Faucon Millenium est indiquée en rouge (axe ct' du référentiel $\mathcal{R}'$). Les signaux électromagnétiques émis depuis l'Étoile Noire (événements E_1 et E_2), se réfléchissent sur le vaisseau (événements I_1 et I_2) puis sont reçus par l'antenne radar de l'Étoile Noire (R_1 et R_2) : la dilatation de la période du signal par effet Doppler est clairement visible sur le diagramme. Certaines projections ont été omises pour ne pas rendre le diagramme illisible.*

2. Dynamique dans la Station Spatiale Internationale (ISS)

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Vitesse de rotation d'un satellite en orbite circulaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre. On supposera son orbite circulaire, de rayon r_s (fig. 2). Par symétrie, dans ce cas particulier la vitesse angulaire de rotation ω est constante. On souhaite dans cette première partie établir l'expression de la vitesse angulaire de rotation ω du satellite en fonction du rayon r_s de son orbite.

Pour cette première partie, on se place dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, dont l'origine est au centre O de la Terre, et dont les axes sont définis par des étoiles lointaines. On choisira nos axes de telle sorte que l'orbite soit dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

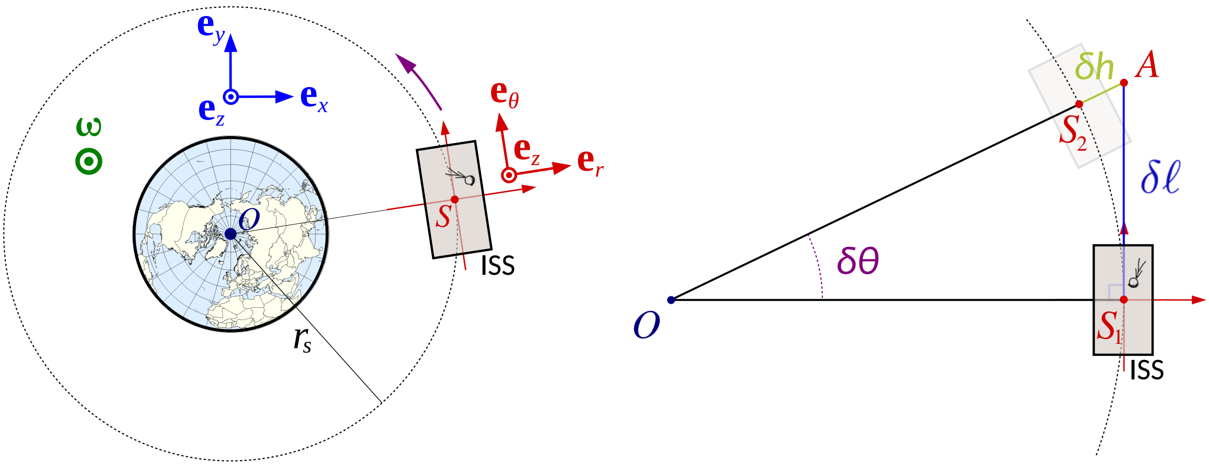

FIGURE 2 – *À gauche, orbite schématisée du satellite. À droite, mouvement du satellite sur son orbite pendant δt : initialement à la position S_1, il parcourt un angle infinitésimal $\delta\theta$ sur son orbite circulaire et atteint la position suivante S_2. Ce mouvement peut être vu comme la combinaison d'un déplacement infinitésimal $\delta\ell$ en ligne droite et un déplacement infinitésimal δh de chute libre vers le centre O de la Terre.*

La légende raconte qu'Isaac Newton a découvert la loi de la gravitation universelle en observant la chute d'une pomme (fig. 5). Considérant la pomme qui tombe, puis la Lune qui orbite autour de la Terre, Isaac Newton imagine que la Lune doit elle aussi subir l'attraction gravitationnelle de la Terre, et que, comme la pomme, elle tombe à chaque instant vers le centre de la Terre. Nous allons appliquer ce raisonnement à un satellite quelconque (un satellite naturel comme la Lune, ou un satellite artificiel), en nous restreignant ici au cas le plus simple d'une orbite circulaire.

Pendant un intervalle infinitésimal de temps δt, le satellite, initialement à la position S_1, parcourt un angle infinitésimal $\delta\theta$ sur son orbite circulaire. On peut, comme Newton, considérer que ce mouvement est la combinaison d'un déplacement infinitésimal $\delta\ell$ en ligne droite (le mouvement que le satellite effectuerait en l'absence d'attraction gravitationnelle, d'après le principe d'inertie), et un déplacement infinitésimal δh de chute libre (mouvement accéléré uniformément) vers le centre O de la Terre (fig. 2). La combinaison de ces deux déplacements infinitésimaux amène le satellite à sa position suivante S_2 sur son orbite circulaire.

2.1 — Exprimez l'angle $\delta\theta$ en fonction de δt et de la vitesse angulaire de rotation ω du satellite.

Par définition de la vitesse angulaire de rotation, on a, de manière immédiate, $\delta\theta = \omega\delta t$.

2.2 — Que valent les distances OS_1 et OS_2 ? Exprimez la distance OA en fonction de r_s et de $\delta\theta$.

Les points S_1 et S_2 appartiennent tous deux à l'orbite circulaire de rayon r_s ; par conséquent, $OS_1 = OS_2 = r_s$. De plus, le triangle OS_1A étant rectangle en S_1, on a :

$$OS_1 = OA\cos\delta\theta \qquad \text{d'où} \quad OA = \frac{OS_1}{\cos\delta\theta} = \frac{r_s}{\cos\delta\theta}.$$

2.3 — Déduisez-en la distance $\delta h = AS_2$, et exprimez la en fonction de r_s et de $\delta\theta$.

Les points O, S_2 et A étant alignés, on a $AS_2 = OA - OS_2$. De ce qui précède, on déduit :

$$\delta h = AS_2 = OA - OS_2 = \frac{r_s}{\cos\delta\theta} - r_s = r_s\left(\frac{1}{\cos\delta\theta} - 1\right).$$

2.4 — En effectuant un développement limité en $\delta\theta$, exprimez δh en fonction de r_s et de $(\delta\theta)^2$.

L'angle $\delta\theta$ étant infinitésimal, on peut faire un développement limité de l'expression précédente :

$$\delta h = AS_2 = r_s\left(\frac{1}{\cos\delta\theta} - 1\right) = r_s\left(1 + \frac{(\delta\theta)^2}{2} + \mathcal{O}((\delta\theta)^4) - 1\right) \approx \frac{r_s(\delta\theta)^2}{2}.$$

S'agissant de quantités infinitésimales, on peut considéré l'égalité comme stricte : $\delta h = r_s(\delta\theta)^2/2$, car les termes d'ordre supérieur sont infiniment plus petits.

On rappelle que la force d'attraction gravitationnelle terrestre que subit un mobile M de masse m s'écrit :

$$\mathbf{F}_\oplus = m\mathbf{G}_\oplus(M)$$

où $\mathbf{G}_\oplus(M)$ est le champ gravitationnel terrestre au point M, qu'on peut écrire :

$$\mathbf{G}_\oplus(M) = -\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{OM^2}\frac{\mathbf{OM}}{OM} = -\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r^2}\,\mathbf{e}_r = -G_\oplus(M)\,\mathbf{e}_r \qquad \text{(Loi de la gravitation universelle)}$$

2.5 — Sous l'effet de l'accélération $G_\oplus(S)$ qu'on peut considérer comme constante pendant δt, de quelle hauteur δh le satellite initialement en S tombe-t-il (chute libre) dans la direction du centre de la Terre ? Donnez ainsi une seconde expression de δh en fonction de $\mathcal{G}$, $m_\oplus$, r_s et $(\delta t)^2$.

Sous l'effet de l'accélération $G_\oplus(S)$ qu'on peut considérer comme constante pendant δt, le satellite "tombe" d'une hauteur δh, qu'on peut écrire (chute libre) :

$$\delta h = \frac{1}{2}G_\oplus(S)(\delta t)^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^2}(\delta t)^2$$

2.6 — À partir des deux expressions obtenues pour δh, montrez que la vitesse de rotation angulaire ω du satellite vérifie :

$$\omega^2 = \mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^3}.$$

En utilisant les deux expressions obtenues pour δh, on obtient :

$$\delta h = AS_2 = \frac{r_s(\delta\theta)^2}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^2}(\delta t)^2 \qquad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{(\delta\theta)^2}{(\delta t)^2} = \mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^3} \qquad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^3}}.$$

2.7 — Exprimez la période de révolution $\mathcal{T}$ du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, $m_\oplus$ et r_s.

La période de révolution $\mathcal{T}$ se déduit de la vitesse angulaire :

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_s^3}{\mathcal{G}m_\oplus}}.$$

2.8 — Exprimez $\mathcal{T}^2$ en fonction de r_s^3. Quelle loi célèbre reconnaissez-vous ?

D'après ce qui précède, on obtient immédiatement :

$$\mathcal{T}^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_\oplus} r_s^3$$

où on reconnaît la $3^{\text{ème}}$ loi de Kepler : *"Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe"*, le demi-grand axe se confondant ici avec le rayon r_s car l'orbite est circulaire.

Dynamique à bord de l'ISS

On s'intéresse au cas particulier de la Station Spatiale Internationale, en orbite autour de la Terre à une altitude moyenne $h = h_{\text{ISS}} \approx 415\,\text{km}$ au-dessus du niveau de la mer. L'orbite de l'ISS est quasi-circulaire. On notera $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ le référentiel solidaire de l'ISS, dont on placera l'origine S au centre de l'un des modules de la station ; on choisira un trièdre $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ selon les directions principales de la station (figures 2 et 4).

2.9 — Donnez l'expression, puis la valeur numérique de la vitesse angulaire de rotation ω_{ISS} de la Station Spatiale Internationale dans $\mathcal{R}_g$. Déduisez-en la période de révolution $\mathcal{T}_{\text{ISS}}$ de l'ISS autour de la Terre.

L'ISS orbite à une altitude moyenne $h_{\text{ISS}} \approx 415\,\text{km}$, soit à une distance $r_s = R_\oplus + h_{\text{ISS}} \approx 6371\,\text{km} + 415\,\text{km} \approx 6786\,\text{km}$ du centre de la Terre.

D'après les résultats précédents, la vitesse angulaire de l'ISS s'écrit :

$$\omega_{\text{ISS}} = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_\oplus}{r_s^3}} \approx \sqrt{\frac{6.6743\times10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}\times 5.9722\times10^{24}\,\text{kg}}{(6.786\times10^6\,\text{m})^3}} \approx 1.1294\times10^{-3}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

D'où on déduit la période de révolution de l'ISS :

$$\mathcal{T}_{\text{ISS}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{ISS}}} \approx 5563.3\,\text{s} \approx 92.72\,\text{min}.$$

2.10 — Le référentiel $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ solidaire de l'ISS est-il inertiel/galiléen ? Justifiez.

Dans le référentiel géocentrique (qu'on peut considérer comme inertiel/galiléen, au moins pour des durées très inférieures à une année), la station internationale est en rotation : le référentiel associé $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ n'est donc pas inertiel/galiléen.

2.11 — En utilisant la relation de Varignon, montrez que la vitesse $\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g}$ de l'origine S dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ s'écrit :

$$\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}$$

Déduisez-en une expression de sa norme $u_{S/\mathcal{R}_g}$ en fonction de ω_{ISS} et h_{ISS}. Application numérique.

Dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ solidaire de l'ISS, le vecteur $\mathbf{OS}$ est constant ; d'autre part, d'après la relation de Varignon, on a :

$$\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OS}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OS}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_{\text{ISS}}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_{\text{ISS}}/\mathcal{R}_g} \times \mathbf{OS} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}.$$

Comme $\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} = \omega_{\text{ISS}}\, \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{OS} = r_s\, \mathbf{e}_r$, on obtient :

$$\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS} = \omega_{\text{ISS}}\, \mathbf{e}_z \times r_s\, \mathbf{e}_r = r_s\, \omega_{\text{ISS}}\, \mathbf{e}_\theta.$$

La norme de la vitesse de l'ISS dans $\mathcal{R}_g$ vaut ainsi :

$$u_{S/\mathcal{R}_g} = r_s\, \omega_{\text{ISS}} \approx 6.786 \times 10^6\,\mathrm{m} \times 1.1294 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \approx 7664.1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \approx 27591\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

2.12 — En utilisant ce qui précède, montrez que :

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS})$$

déduisez de ce qui précède une expression du vecteur accélération $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$ de l'origine S de $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ en fonction de ω_{ISS} et h_{ISS}. Application numérique pour la norme de $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$.

Le vecteur accélération $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$ du point S dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est la dérivée du vecteur vitesse $\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g}$ de ce même point, dérivée calculée dans $\mathcal{R}_g$:

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g}$$

En remplaçant $\mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g}$ par son expression, on obtient :

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}\right]\right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} \times \mathbf{OS} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OS}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{u}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS})$$

car on suppose ici $\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}$ constant (orbite circulaire parcourue à vitesse angulaire constante).

En utilisant la formule du double produit vectoriel, l'expression de $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$ devient :

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}) = (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \cdot \mathbf{OS})\, \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} - (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}})\, \mathbf{OS} = -\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}^2\, \mathbf{OS}$$

car les vecteurs $\mathbf{OS}$ et $\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}$ sont orthogonaux.

Comme à tout instant $\mathbf{OS} = OS\, \mathbf{e}_r = r_s\, \mathbf{e}_r$, la relation précédente se réduit à :

$$\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g} = -\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}^2\, \mathbf{OS} = -\omega_{\text{ISS}}^2\, r_s\, \mathbf{e}_r \qquad \text{(accélération } \textit{centripète} \text{ au point } S\text{).}$$

Numériquement, la norme $a_{S/\mathcal{R}_g}$ du vecteur accélération $\mathbf{a}_{S/\mathcal{R}_g}$ vaut :

$$a_{S/\mathcal{R}_g} = \omega_{\text{ISS}}^2\, r_s \approx \left(1.1294 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \times 6.786 \times 10^6\,\mathrm{m} \approx 8.655\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

2.13 — Le cosmonaute Thomas Pesquet (de masse $m_{\text{TP}} = 84\,\mathrm{kg}$) flotte immobile au centre S du module *Zarya* ("aube" en russe). Dans le référentiel de l'ISS, faites le bilan des forces (et éventuelles pseudo-forces) qui s'exercent sur Thomas Pesquet. Donnez l'expression de chaque force ou pseudo-force, et calculez explicitement la résultante de ces forces.

Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$, Thomas Pesquet (au point S), de masse m_{TP} est soumis aux forces suivantes :

(i) la force d'attraction gravitationnelle de la Terre au point S :

$$\mathbf{F}_{\oplus}(S) = m_{\text{TP}}\,\mathbf{G}_{\oplus}(S) = -\mathcal{G}\frac{m_{\oplus}\,m_{\text{TP}}}{r_s^2}\,\mathbf{e}_r$$

(ii) la pseudo-force inertielle d'entraînement $\mathbf{F}_{\text{e}}(S)$ au point S :

$$\mathbf{F}_{\text{e}}(S) = -m_{\text{TP}}\,\mathbf{a}_{\text{e}}(S)$$

où $\mathbf{a}_{\text{e}}(S)$ est l'accélération d'entraînement au point S. Cette accélération d'entraînement $\mathbf{a}_{\text{e}}(S)$ se réduit ici au terme centrifuge :

$$\mathbf{a}_{\text{e}}(S) = \mathbf{a}(S/\mathcal{R}_g) + \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{SS}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{SS} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{OS}) = -\omega_{\text{ISS}}^2\,r_s\,\mathbf{e}_r.$$

(iii) Enfin, il n'y a pas de force de Coriolis puisqu'on suppose Thomas Pesquet immobile (sa vitesse $u_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}$ dans le référentiel de l'ISS est nulle).

La résultante des forces (et pseudo-forces) qui s'appliquent sur Thomas Pesquet dans $\mathcal{R}_{\text{ISS}}$ vaut par conséquent :

$$\sum \mathbf{F}_{/\text{TP}} = \mathbf{F}_{\oplus}(S) + \mathbf{F}_{\text{e}}(S) = -\mathcal{G}\frac{m_{\oplus}\,m_{\text{TP}}}{r_s^2}\,\mathbf{e}_r + m_{\text{TP}}\,\omega_{\text{ISS}}^2\,r_s\,\mathbf{e}_r.$$

En remplaçant ω_{ISS} par son expression, on obtient :

$$\sum \mathbf{F}_{/\text{TP}} = \mathbf{F}_{\oplus}(S) + \mathbf{F}_{\text{e}}(S) = -\mathcal{G}\frac{m_{\oplus}\,m_{\text{TP}}}{r_s^2}\,\mathbf{e}_r + m_{\text{TP}}\,\omega_{\text{ISS}}^2\,r_s\,\mathbf{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_{\oplus}\,m_{\text{TP}}}{r_s^2}\,\mathbf{e}_r + m_{\text{TP}}\,\mathcal{G}\frac{m_{\oplus}}{r_s^3}\,r_s\,\mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

2.14 — Qu'en déduisez-vous ? Que ressent Thomas Pesquet ?

La résultante des forces qui s'appliquent sur Thomas Pesquet est nulle : Thomas Pesquet est en apesanteur ; autrement dit, la force d'entraînement (force centrifuge) due à la rotation du satellite autour de la Terre compense exactement l'attraction terrestre.

2.15 — Depuis le centre S du module *Zarya*, Thomas Pesquet lance une balle de tennis dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ (de la poupe vers la proue, *i.e.* d'arrière en avant), avec une vitesse initiale $u_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}(t = 0) = u_0 = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Donnez l'expression de l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_{\text{c}}$, ainsi que de la force de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{c}}$ qui s'exerce sur la balle. Faites un schéma où vous représenterez la balle de tennis, sa vitesse initiale, $\mathbf{a}_{\text{c}}$ et $\mathbf{F}_{\text{c}}$. Application numérique pour l'accélération de Coriolis. Commentez.

Pour la balle de tennis en mouvement (vecteur vitesse $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}$) dans le référentiel non inertiel de l'ISS, le terme de Coriolis, proportionnel à la vitesse, n'est pas nul. L'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_{\text{c}}$ et la pseudo-force inertielle de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{c}}$ s'écrivent, pour la balle de tennis :

$$\mathbf{a}_{\text{c}} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}_{\text{c}} = -m_{\text{balle}}\,\mathbf{a}_{\text{c}} = -2m_{\text{balle}}\,\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}.$$

À l'instant du lancer de la balle ($t = 0$), le vecteur vitesse initial $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}}(t = 0)$ est selon $\mathbf{e}_\theta$ et vaut $u_0\,\mathbf{e}_\theta$. Les termes de Coriolis $\mathbf{a}_{\text{c}}$ et $\mathbf{F}_{\text{c}}$ se réduisent alors à :

$$\mathbf{a}_{\text{c}} = 2\boldsymbol{\omega}_{\text{ISS}} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{ISS}}} = 2\,\omega_{\text{ISS}}\,\mathbf{e}_z \times u_0\,\mathbf{e}_\theta = -2\,\omega_{\text{ISS}}\,u_0\,\mathbf{e}_r \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}_{\text{c}} = -m_{\text{balle}}\,\mathbf{a}_{\text{c}} = +2m_{\text{balle}}\,\omega_{\text{ISS}}\,u_0\,\mathbf{e}_r.$$

Dans cette configuration particulière (fig. 3), la force de Coriolis tend à éloigner la balle du centre de la Terre : la force $\mathbf{F}_{\text{c}}$ est ici orientée selon $+\mathbf{e}_r$, *i.e.* du nadir vers le zénith.

Numériquement, la norme de l'accélération de Coriolis vaut :

$$a_{\text{c}} = |\mathbf{a}_{\text{c}}| = 2\,\omega_{\text{ISS}}\,u_0 \approx 2 \times 1.1294 \times 10^{-3}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \times 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 0.023\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Pour la vitesse considérée ($10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), l'effet de la force de Coriolis sera ici assez faible, à peine perceptible par les passagers de l'ISS. Sur la longueur d'un module de l'ISS, la déviation attendue de la trajectoire de la balle du fait de la force de Coriolis est inférieure au millimètre.

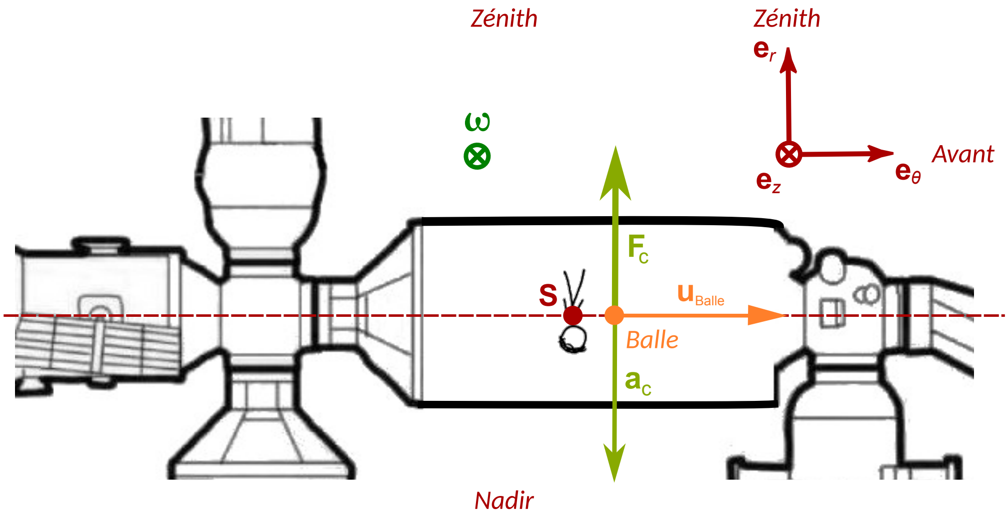

FIGURE 3 – *Lancer de la balle vers l'avant de l'ISS. La force de Coriolis résultante* $\mathbf{F}_c$ *est orientée selon* $+\mathbf{e}_r$ *et tend éloigner la balle du centre de la Terre.*

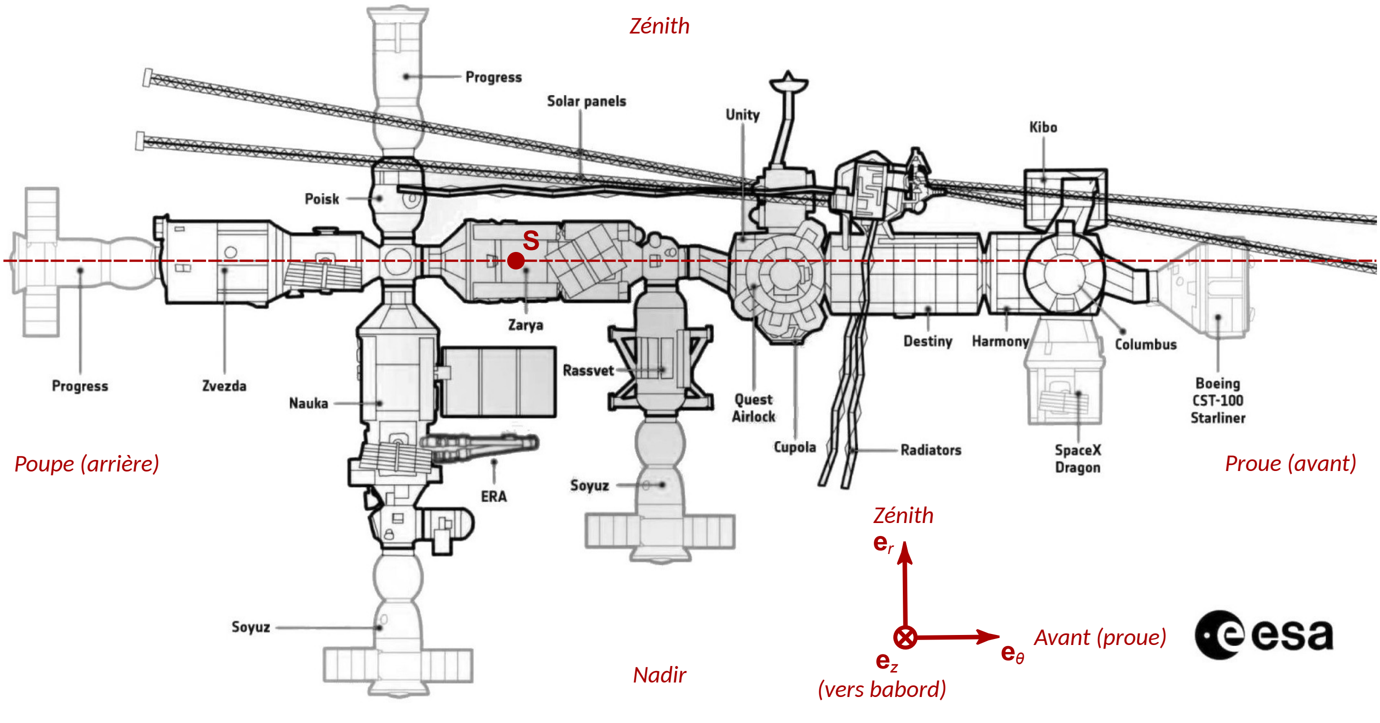

FIGURE 4 – *Schéma de la Station Spatiale Internationale (ISS), vue depuis tribord (côté droit quand on regarde vers l'avant sur un navire ou un aéronef).*

Données : Constante de Gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67430(15) \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Masse de la Terre : $m_\oplus = 5.9722 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ Rayon moyen (volumétrique) : $R_\oplus = 6371\,\mathrm{km}$

Masse totale de l'ISS : $m_{\mathrm{ISS}} = 450$ tonnes Altitude moyenne de l'ISS : $h_{\mathrm{ISS}} \approx 415\,\mathrm{km}$

Masse de Thomas Pesquet : $m_{\mathrm{TP}} = 84\,\mathrm{kg}$

Quelques développements limités utiles (autour de zéro) :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4) \qquad \frac{1}{\cos x} = 1+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4) \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5) \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\mathcal{O}(x^3)$$

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen et un référentiel $\mathcal{R}'$ non-galiléen. Généralisation de la deuxième loi de Newton (RFD). Pseudo-forces inertielles. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r'}(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$

Si on considère un mobile M de masse m dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la deuxième loi de Newton (RFD) se généralise sous la forme :

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_\text{ext} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{c} = \sum \mathbf{F}_\text{ext} + \mathbf{F}_\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{c}$$

avec $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ la force inertielle d'entraînement et $\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{c}$ la force inertielle de Coriolis.

Double produit vectoriel. Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel : si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont trois vecteurs quelconques, alors :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\ \mathbf{C}.$$

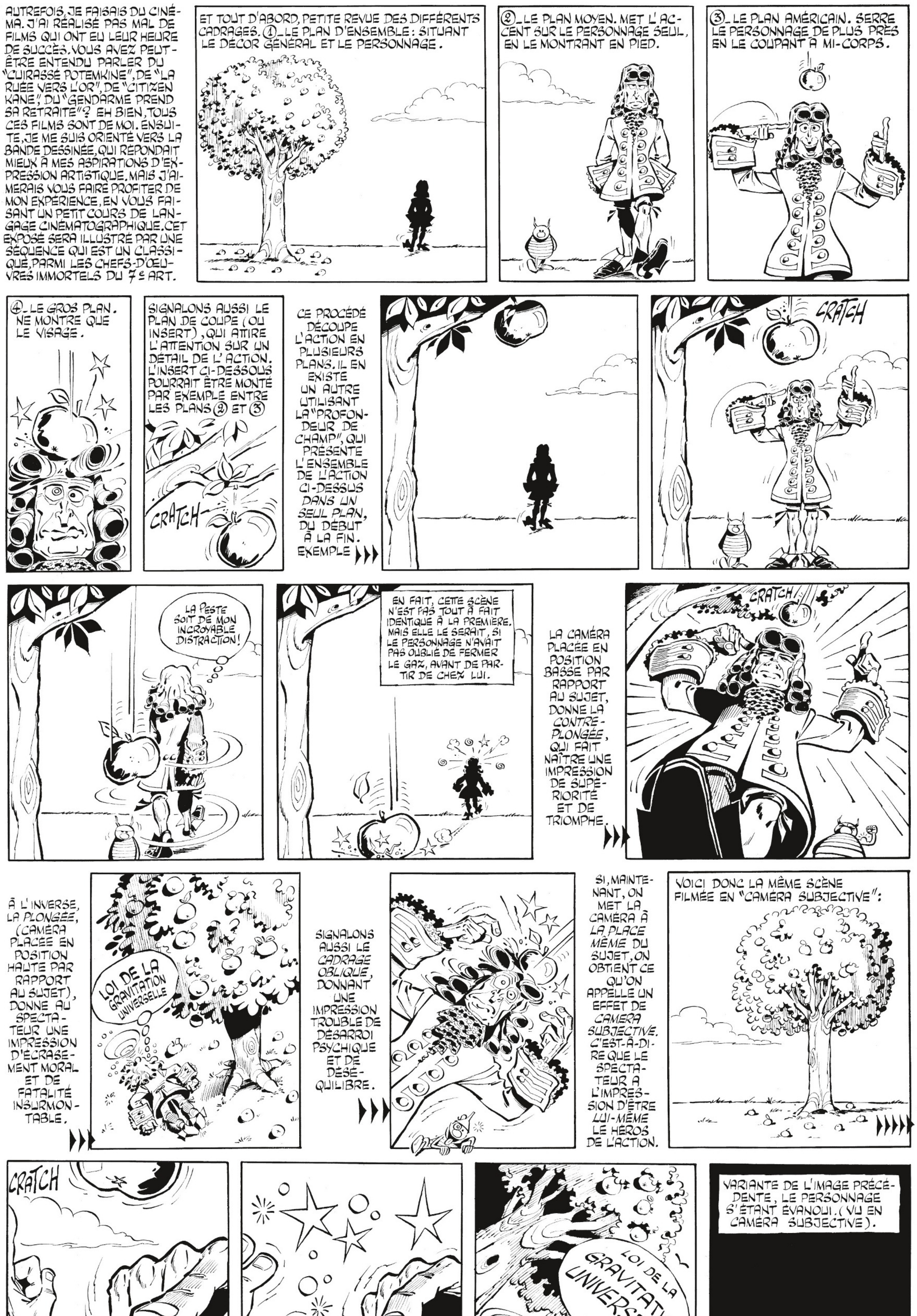

FIGURE 5 – *La légende raconte qu'Isaac Newton eut l'idée de la théorie de la Gravitation Universelle en observant la chute d'une pomme. L'anecdote, célèbre, a notamment inspiré Marcel Gottlieb (dit "Gotlib", 1934–2016) qui en a fait un gag récurrent, Isaac Newton recevant régulièrement sur la tête des pommes, mais aussi les objets les plus divers : mouette, piano, pélican, etc. Extrait de "Rubrique-à-Brac" (1968-1972) où Gotlib utilise l'anecdote pour illustrer les différents cadrages cinématographiques.*