

INTERROGATION ÉCRITE — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Interrogation n°1 : durée 15 minutes

[Total : 10 pts]

1. Mécanique dans un train en mouvement

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

On raisonnera dans le référentiel local terrestre \mathcal{R} , qu'on supposera galiléen/inertiel. On munit \mathcal{R} d'une origine arbitraire O et d'un trièdre direct $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, où le vecteur \mathbf{e}_z est orienté selon la verticale locale, et $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ sont dans le plan horizontal.

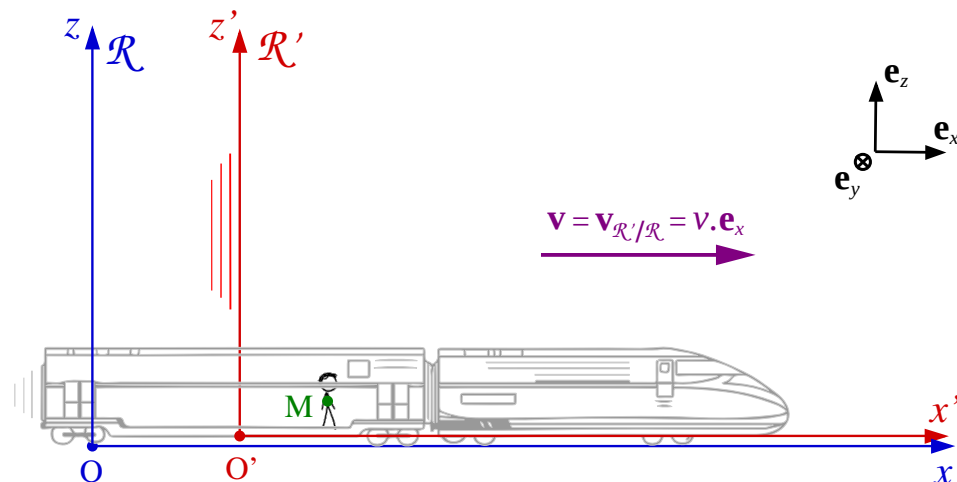


FIGURE 1 – Référentiels du sol et du TGV.

Un train à grande vitesse (TGV) se déplace en ligne droite à la vitesse $v = 288 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On considère le référentiel du train, que l'on note \mathcal{R}' ; on munit ce référentiel d'une origine arbitraire O' , et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ que précédemment. On choisit l'orientation de \mathbf{e}_x dans la direction du mouvement du train : la vitesse relative $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ s'écrit ainsi $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$. On prendra l'origine du temps t à l'instant où les origines O et O' coïncident (figure 1).

On considère un passager de centre de gravité M dont on analyse le mouvement dans les deux référentiels, celui du sol et celui du train. On repère à chaque instant la position de M dans \mathcal{R} par le vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t) : (x, y, z)$, et par le vecteur position $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t) : (x', y', z')$ dans \mathcal{R}' .

0.5 pt 1.1 — Le référentiel du train est-il galiléen/inertiel?

Le train (référentiel \mathcal{R}') est en translation uniforme par rapport au référentiel inertiel/galiléen \mathcal{R} : le référentiel \mathcal{R}' du train est donc lui aussi inertiel/galiléen.

2 pts 1.2 — Rappelez l'expression de la transformation de Galilée entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' : donnez l'expression sous forme vectorielle; puis donnez les expressions des coordonnées (x', y', z') du mobile dans le référentiel du train en fonction de ses coordonnées (x, y, z) dans le référentiel local terrestre.

Si on note $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ la position d'un point matériel M repéré dans le référentiel \mathcal{R} à un instant t quelconque, et $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$ la position du même point matériel repéré cette fois dans \mathcal{R}' au même instant t , on a la relation :

$$\mathbf{OM}(t) = \mathbf{OO}'(t) + \mathbf{O'M}(t) \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{OO}'(t) + \mathbf{r}'(t).$$

Avec les conventions choisies, pendant toute la durée du mouvement de translation uniforme du TGV dans le référentiel \mathcal{R}' à la vitesse \mathbf{v} , le mouvement de l'origine O' vérifie dans \mathcal{R} :

$$\mathbf{OO}'(t) = \mathbf{vt}$$

Car on a choisi de fixer l'origine des temps $t = 0$ quand $O \equiv O'$. On en déduit immédiatement l'équation de la transformation de Galilée entre les référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{vt} \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{vt}.$$

En projetant cette relation vectorielle sur les axes définis par le trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, on obtient l'expression de la transformation de Galilée entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , cette fois en coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

2 pts 1.3 — Rappelez la loi classique de composition des vitesses entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . On notera respectivement $\mathbf{u}(t) : (u_x = dx/dt, u_y = dy/dt, u_z = dz/dt)$ la vitesse du mobile M dans \mathcal{R} , et $\mathbf{u}'(t) : (u'_x = dx'/dt, u'_y = dy'/dt, u'_z = dz'/dt)$ sa vitesse dans \mathcal{R}' . Donnez la loi de composition des vitesses sous forme vectorielle, puis en composantes.

Si on appelle \mathbf{u} (respectivement \mathbf{u}') la vitesse d'un mobile mesurée dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), la loi de composition des vitesses s'obtient en dérivant les équations de la transformation de Galilée par rapport au temps t . Connaissant la vitesse instantanée \mathbf{u} d'un mobile dans le référentiel \mathcal{R} , la vitesse \mathbf{u}' du même objet vu dans le référentiel \mathcal{R}' s'écrira :

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \text{et réciproquement} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

On parle aussi d'*additivité des vitesses*.

En utilisant les mêmes conventions que précédemment (axes Ox et $O'x'$ choisis selon la vitesse relative \mathbf{v} entre les référentiels), cette relation, en composantes, devient :

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

Remarque : cette expression de la loi de composition des vitesses reste valide même si les origines O et O' ne se confondent pas à $t = 0$.

- 1 pt** 1.4 — Un passager du train se déplace à $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ le long du train, depuis la motrice vers la queue du train. Donnez l'expression de sa vitesse dans les deux référentiels (vous donnerez toutes les composantes). Application numérique pour u'_x et u_x (*attention aux unités*).

La vitesse du TGV dans le référentiel local terrestre \mathcal{R} vaut $v = 288 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du wagon, avec le système d'axes choisi (\mathbf{e}_x selon la vitesse \mathbf{v}), les composantes de la vitesse \mathbf{u}' du passager s'écrivent : $\mathbf{u}' : (u'_x = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u'_y = 0, u'_z = 0)$. En appliquant la loi classique de composition des vitesses, on obtient les composantes de la vitesse \mathbf{u} du passager dans le référentiel terrestre \mathcal{R} :

$$\begin{cases} u_x = u'_x + v = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = +79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ u_y = u'_y = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ u_z = u'_z = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Freinage du train

En raison du signallement d'un objet sur la voie, le TGV freine. On suppose qu'il décélère avec une accélération constante négative $\mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} = a_x \mathbf{e}_x$ avec $a_x = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 0.5 pt** 1.5 — Le référentiel du TGV est-il toujours galiléen? Justifiez.

Dans le référentiel \mathcal{R} , le mouvement du train est toujours rectiligne, mais il n'est plus uniforme car il décélère (sa vitesse par rapport à \mathcal{R} n'est donc plus constante). Le référentiel \mathcal{R}' solidaire du train n'est donc plus inertielle/galiléen.

À l'approche des fêtes, la voiture-bar du TGV a été décorée : une boule de Noël a été accrochée avec un fil au plafond de la voiture-bar, au centre du wagon (fig. 2).

- 1 pt** 1.6 — Pendant la phase de freinage du train, représentez la boule de Noël, le fil qui la retient au plafond, et l'ensemble des forces (et éventuelles pseudo-forces inertielles) qui s'exercent sur la boule de Noël dans le référentiel \mathcal{R}' du train.

Dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du train, non galiléen, la boule de Noël est soumise à 3 forces (figure 2) :

- Son poids $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \mathbf{e}_z$;
- La tension exercée par le fil \mathbf{T}_{fil} ;
- La pseudo-force inertielle d'entraînement $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$, où l'accélération d'entraînement \mathbf{a}_e se réduit à $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} = a_x \mathbf{e}_x$. La force d'entraînement tire la boule vers l'avant du train pendant la phase de freinage.

De plus, le terme de Coriolis est nul car il n'y a ici aucune rotation.

À l'équilibre (on suppose que la phase de freinage à décélération constante dure suffisamment pour que l'équilibre puisse s'établir), on a :

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_{\text{fil}} + \mathbf{F}_e = m \mathbf{a}' = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{T}_{\text{fil}} = -(\mathbf{P} + \mathbf{F}_e).$$

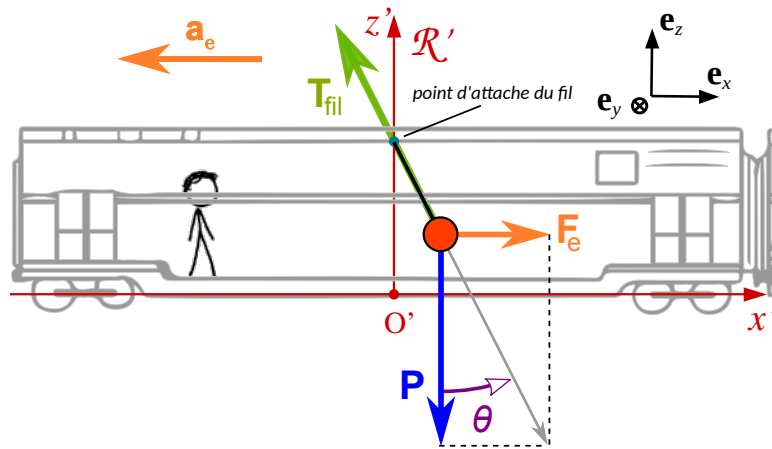


FIGURE 2 – Voiture-bar du TGV. Dans le référentiel \mathcal{R}' , la boule de Noël suspendue au plafond subit 3 forces : son poids $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$, la tension du fil \mathbf{T}_{fil} , et la pseudo-force d’entraînement $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = -m \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}$. À l’équilibre, $\mathbf{P} + \mathbf{T}_{\text{fil}} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$.

2 pts 1.7 — Que vaut l’angle du fil avec la verticale pendant le freinage du train ?

La direction du fil est aussi la direction de la tension \mathbf{T}_{fil} que le fil exerce sur la boule de Noël (c’est aussi la direction de la force que la boule exerce sur le fil, par application de la 3^{ème} loi de Newton). L’angle θ que fait le fil avec la verticale est aussi l’angle entre le vecteur $\mathbf{P} + \mathbf{F}_e = -\mathbf{T}_{\text{fil}}$ et la verticale. Cet angle vérifie :

$$\tan \theta = \frac{F_e}{P} = \frac{m a_e}{m g} = \frac{a_e}{g} = \frac{a_{O'/\mathcal{R}}}{g} = \frac{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \simeq 0.102 \quad \text{d'où} \quad \theta \simeq 0.102 \text{ rad} \simeq 5.82^\circ.$$

Arrivée du train dans un virage

Après avoir repris sa vitesse de croisière ($288 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$), le TGV arrive dans une section courbe de la voie ferrée (virage). Dans le virage, le TGV maintient sa vitesse de $288 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport aux rails, mais sa trajectoire est désormais circulaire.

1 pt 1.8 — Sur la figure 3 ci-dessous, représentez les pseudo-forces inertielles qu’un objet immobile M subit dans le référentiel \mathcal{R}' du train lorsque le train parcourt la partie courbe de la voie ferrée.

Comme l’objet est immobile dans \mathcal{R}' , sa vitesse \mathbf{u}' y est nulle et le terme d’accélération de Coriolis aussi.

Le terme d’accélération d’entraînement \mathbf{a}_e se réduit à l’accélération centripète :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'M) \\ &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{CO}') + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'M) \\ &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{TM}) \end{aligned}$$

où T est la projection orthogonale du point M sur l’axe de rotation (C, \mathbf{e}_z) . Ce qui donne :

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{TM}) = (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \mathbf{TM}) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}) \mathbf{TM} = -\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \mathbf{TM}$$

On en déduit la force d’entraînement, qui se réduit au terme centrifuge :

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = +m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \mathbf{TM}$$

Il s’agit d’une force radiale, qui tend à écarter le mobile M de l’axe de rotation (figure 3).

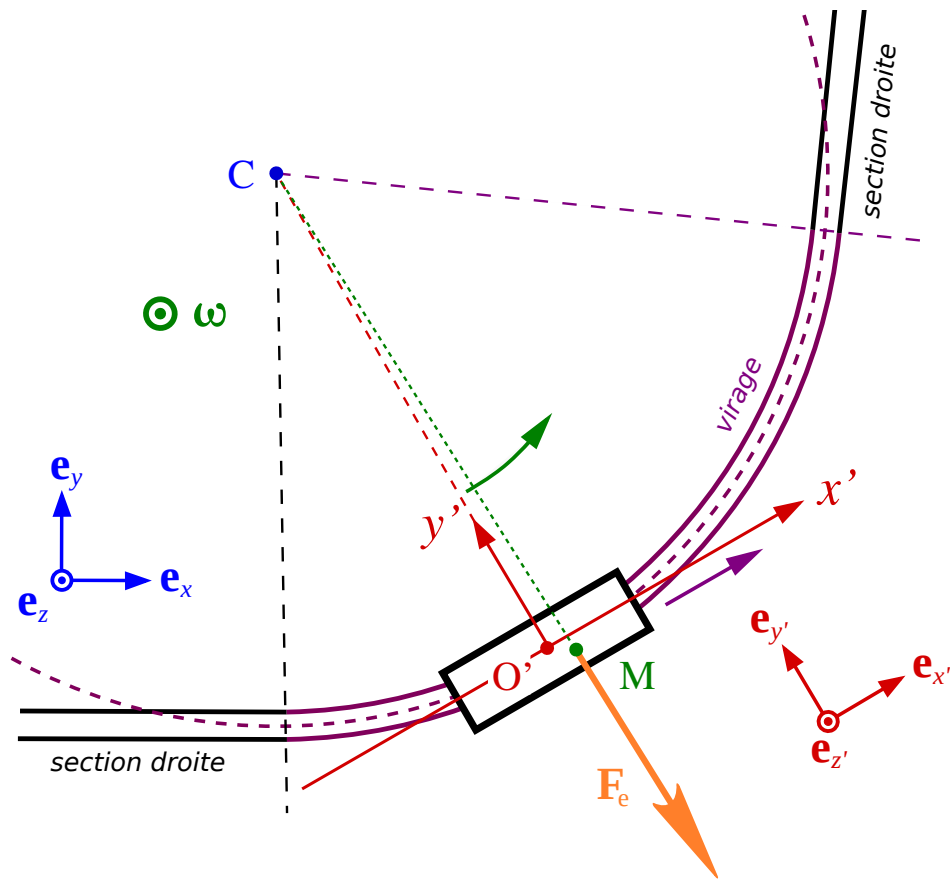


FIGURE 3 – Le TGV circule dans une section courbe de la voie ferrée. Comme le mobile M est immobile dans \mathcal{R}' , sa vitesse \mathbf{u}' y est nulle et la force de Coriolis aussi. La force d'entraînement \mathbf{F}_e se réduit au terme centrifuge, radial.