SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Licence de Physique

Relativité Restreinte : Conventions du Cours

Parcours SPRINT & Double Majeure Physique-Maths

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

1. Vecteurs

Notation des vecteurs. Au tableau, les vecteurs seront notés avec une flèche : $\vec{A}$. En revanche, pour des raisons typographiques, et suivant la convention de nombreux ouvrages en physique, dans tous les documents du cours (résumés, exercices, solutions, sujets d'examen) les vecteurs seront en général notés en lettres romaines (*i.e.* droites) grasses : $\mathbf{A}$, tandis que leurs composantes (A_x, A_y, A_z) et leur norme A seront notées en italique.

Comme il n'est pas envisageable de noter les vecteurs en gras sur une copie manuscrite, on attend évidemment que vous notiez vos vecteurs avec une flèche dans vos copies, et que vous distinguiez clairement les vecteurs des nombres scalaires.

Composantes d'un vecteur. Les vecteurs de la base orthonormée du repère cartésien (O, x, y, z) seront notés : $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$; les composantes d'un vecteur $\mathbf{A}$ sur cette base s'écriront (A_x, A_y, A_z), avec :

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z$$

De manière plus générale, sur une base quelconque $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1\ldots3}$, on écrira les composantes (A_1, A_2, A_3) d'un vecteur $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{e}_1 + A_2\,\mathbf{e}_2 + A_3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\,\mathbf{e}_i.$$

En coordonnées cartésiennes, par exemple, on aura $(A_1, A_2, A_3) = (A_x, A_y, A_z)$.

On présentera les composantes des vecteurs indifféremment en ligne ou en colonne, selon les besoins : par exemple, en coordonnées cartésiennes,

$$\mathbf{A} : (A_x, A_y, A_z) \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbf{A} : \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}.$$

De manière plus générale, lorsqu'on discutera d'un vecteur quelconque $\mathbf{e}_i$ de la base (cartésienne ou autre), ou d'une composante quelconque A_i d'un vecteur $\mathbf{A}$, on utilisera comme indice des lettres minuscules de l'alphabet romain : i, j, k, … qui pourront prendre les valeurs $\{1, 2, 3\}$.

Produit scalaire. On notera le produit scalaire ordinaire (euclidien) de deux vecteurs par un point centré "·" : ainsi, le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ s'écrira :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Produit vectoriel. On notera le produit vectoriel en utilisant indifféremment la notation française ($\wedge$) ou anglo-saxonne ($\times$) : le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ se notera ainsi $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ s'écrit :

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} : \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}.$$

Vecteur position, vecteur vitesse, vitesse relative. Afin de limiter les risques de confusion, on notera $\mathbf{r} = \mathbf{OM} : (x, y, z)$ le vecteur position d'un mobile M mesuré dans le repère (O, x, y, z) associé au référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{r}' = \mathbf{O'M} : (x', y', z')$ le vecteur position du même objet mais mesuré dans le repère (O', x', y', z') associé au référentiel $\mathcal{R}'$. De la même manière, on notera $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ le vecteur vitesse de l'object considéré mesuré dans $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'$ son vecteur vitesse mesuré dans $\mathcal{R}'$. On réservera en général la lettre v pour la vitesse relative $\mathbf{v}$ entre les référentiels.

2. Quadrivecteurs

Notation. Il n'y pas de convention bien établie pour noter les quadrivecteurs eux-mêmes : selon les ouvrages ou les auteurs, on trouve des notations variées (lettres soulignées, romaines grasses, surmontées d'un *tilde*, *etc.*), parfois indistinctes de celle des vecteurs. Dans ce cours, afin de les distinguer des vecteurs ordinaires, on notera les quadrivecteurs en lettres romaines (*i.e.* droites) grasses avec un *tilde* au-dessus : par exemple, le quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Composantes contravariantes. On notera les *composantes contravariantes* (A^0, A^1, A^2, A^3) d'un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ en plaçant l'indice en haut. Cette notation est classique et se retrouve dans la quasi-totalité des ouvrages de relativité. *Attention à ne pas confondre avec un exposant ! Le contexte permet de distinguer les indices contravariants des exposants.*

On notera :

- A^0 la composante temporelle du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$;
- A^1, A^2, A^3 les trois composantes spatiales du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$. On regroupera souvent ces 3 composantes dans le vecteur ordinaire $\mathbf{A} : (A^1, A^2, A^3)$. En coordonnées cartésiennes, par exemple, on aura $(A^1, A^2, A^3) = (A_x, A_y, A_z)$.

Lorsqu'on discutera d'une composante contravariante quelconque A^μ d'un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$, on utilisera comme indice des lettres minuscules de l'alphabet grec : μ, ν, ξ, κ, $\ldots$ qui pourront prendre les valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$. Les composantes contravariantes d'un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ s'écriront ainsi :

$$\widetilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}) \qquad \text{ou encore} \qquad \widetilde{\mathbf{A}} : A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Composantes covariantes. Suivant l'usage consacré, on notera les *composantes covariantes* $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ en plaçant l'indice en bas. De la même manière que pour les composantes contravariantes, on utilisera des lettres grecques pour les indices muets : μ, ν, ξ, κ, ...

Pseudo-produit scalaire et signature de la métrique. Le pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ sera noté par un point centré "$\cdot$" : ainsi, le pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ s'écrira "$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$".

Dans ce cours, on utilisera la signature $(+\ -\ -\ -)$ pour les signes de la métrique ; autrement dit, le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$ vaudra :

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

On comptera ainsi positivement le produit des composantes temporelles et négativement celui des composantes spatiales. Selon les ouvrages, on trouve les deux conventions, la convention $(+\ -\ -\ -)$ du présent cours et la convention opposée $(-\ +\ +\ +)$.

Convention d'Einstein. Respectant l'usage consacré, dans les expressions quadrivectorielles, on utilisera la *convention de sommation d'Einstein* dite aussi *convention d'Einstein* : lorsque dans un produit de termes un indice grec est doublé, une fois covariant, une fois contravariant, on considère que la sommation sur cet indice est implicite sur les 4 valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$ de cet indice : ainsi,

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Cette notation, très utilisée, permet de compacter considérablement les expressions.

3. Autres notations

Fonctions hyperboliques. Pour les fonctions hyperboliques cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique, on utilisera indifféremment les notations françaises : $\cosh$, $\sinh$, $\tanh$ et les notations anglo-saxonnes plus compactes : ch, sh, th.