LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

MÉMO - LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM

1. Quelques rappels sur les fonctions trigonométriques

On se limite ici à rappeler quelques définitions et relations standards, afin de faire apparaître les similitudes et différences entre les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$, où $i^2 = -1$. On a donc

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Il vient donc que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

et

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

La fonction cosinus est paire alors que la fonction sinus est impaire. Elles sont toutes les deux périodiques de période 2π.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

En notant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$, cette équation devient $X^2 + Y^2 = 1$ qui est l'équation d'un cercle de rayon 1, centré en $(0, 0)$.

Le cosinus peut également être défini à partir du produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}.$$

La fonction tangente est donnée par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

Elle est définie partout où la fonction cosinus n'est pas nulle, c'est-à-dire pour $x = k\pi + \pi/2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On rappelle enfin les dérivées des trois fonctions :

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Fonctions hyperboliques

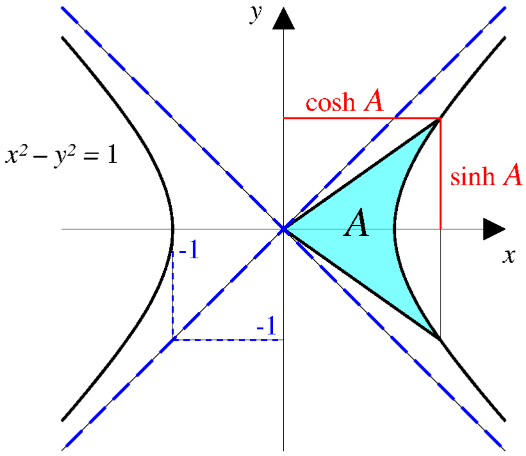

FIGURE 1 – Relation entre les fonctions hyperboliques ch et sh et l'aire A de la région en bleu. Source : Wikipedia, domaine public.

Les fonctions hyperboliques ont été inventées pour calculer l'aire sous la branche d'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ (Figure 1).

Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique peuvent être définies à partir des fonctions trigonométriques :

$$\cosh x = \mathrm{ch}\, x = \cos(ix),$$

$$\sinh x = \mathrm{sh}\, x = -i\sin(ix).$$

Elles sont toutes les deux définies dans $\mathbb{R}$. Il vient donc que

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

et

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ainsi, par construction,

$$e^x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x$$

et

$$e^{-x} = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x.$$

La fonction cosinus hyperbolique est paire et la fonction sinus hyperbolique est impaire. Comme attendu, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

La fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par

$$\tanh x = \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Les dérivées des trois fonctions hyperboliques sont :

$$\frac{d\,\mathrm{ch}\, x}{dx} = \mathrm{sh}\, x,$$

$$\frac{d\,\mathrm{sh}\,x}{dx} = \mathrm{ch}\,x,$$
$$\frac{d\,\mathrm{th}\,x}{dx} = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}.$$

En relativité, on aura aussi parfois besoin des formules d'addition et de soustraction :

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y),$$
$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y),$$
$$\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y),$$
$$\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y).$$

De ces relations, on déduit également que

$$\mathrm{th}\,(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}.$$

Enfin, on rencontrera aussi parfois les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{arcosh}\,x = \mathrm{argch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

définie pour $x \in [1, +\infty[$,

$$\mathrm{arsinh}\,x = \mathrm{argsh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

définie pour $x \in \mathbb{R}$ et

$$\mathrm{artanh}\,x = \mathrm{argth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

définie pour $x \in]-1, 1[$.

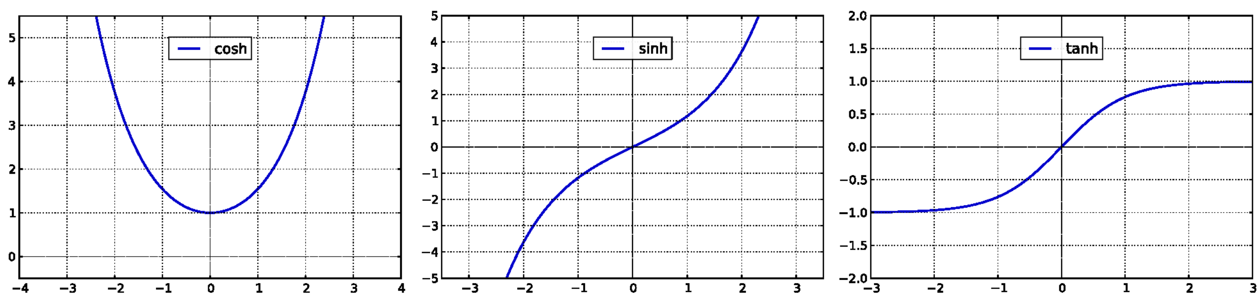

FIGURE 2 – Représentation graphique des trois fonctions hyperboliques ch et sh et th. Source : Wikipedia, domaine public.