SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Licence de Physique

Rappels : Produit Scalaire, Produit Vectoriel

Parcours SPRINT & Double Majeure Physique-Maths

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

Dans tous les documents du présent cours de relativité restreinte, les vecteurs sont notés en lettres romaines (i.e. droites) grasses : $\mathbf{A}$*, tandis que leurs composantes* (A_x, A_y, A_z) *et leur norme* A *seront notées en italique (voir la fiche "Conventions du Cours").*

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition. Soient deux vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Le produit scalaire (*dot product*) des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est un nombre (un *scalaire*), noté $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, égal au produit de leurs normes $\|\mathbf{A}\|$ et $\|\mathbf{B}\|$ et du cosinus de l'angle $(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ formé par les deux vecteurs :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \times \|\mathbf{B}\| \times \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = A\,B\,\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$$

Propriétés. Le produit scalaire est commutatif : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Il est distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

Le produit scalaire d'un vecteur quelconque $\mathbf{A}$ avec lui-même est égal au carré de la norme de ce vecteur :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \|\mathbf{A}\|^2 = A^2$$

Par construction, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

Expression dans une base orthonormée. Si on travaille dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_i\}$ (*i.e.* une base dont les vecteurs sont unitaires et orthogonaux entre eux), les produits scalaires entre les vecteurs de la base valent :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On peut décomposer deux vecteurs quelconques $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sur les vecteurs de la base orthonormée $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i\,\mathbf{e}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \sum_i B_i\,\mathbf{e}_i$$

où les coefficients $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ sont respectivement les composantes (ou coordonnées) des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans la base $\{\mathbf{e}_i\}$. On peut alors exprimer le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ en fonction de leurs composantes respectives :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(\sum_i A_i\,\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j B_j\,\mathbf{e}_j\right) = \sum_i\sum_j A_iB_j\,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \sum_i\sum_j A_iB_j\,\delta_{ij} = \sum_i A_iB_i$$

Par exemple, dans un espace vectoriel de dimension 3 (fréquemment rencontré en physique), muni d'une base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ (coordonnées dites *cartésiennes*), les composantes (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z) des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ vérifient :

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = B_x\,\mathbf{e}_x + B_y\,\mathbf{e}_y + B_z\,\mathbf{e}_z$$

et le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

Le produit scalaire d'un vecteur quelconque $\mathbf{A}$ avec le vecteur unitaire $\mathbf{e}_i$ est égal à la valeur algébrique (*i.e.* positive ou négative) de la projection orthogonale de $\mathbf{A}$ sur la direction définie par le vecteur $\mathbf{e}_i$. Dans une base orthonormée, cette projection est égale à la composante A_i du vecteur $\mathbf{A}$.

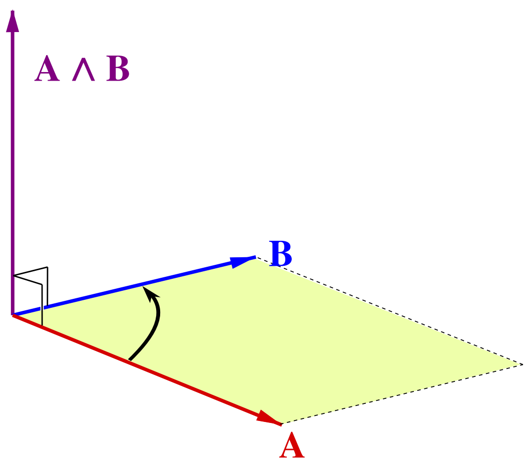
2. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel n'est défini que pour des espaces vectoriels de dimension 3 ou de dimension 7. On s'en sert couramment en physique en dimension 3, notamment pour représenter des tenseurs antisymétriques de rang 2 qui n'ont que 3 composantes indépendantes non nulles.

Définition. Pour deux vecteurs quelconques $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans un espace vectoriel orienté de dimension 3, leur produit vectoriel (*cross product*) est **un vecteur**, que l'on note $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ (notation francophone) ou $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (notation anglo-saxonne). Le produit vectoriel $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ est un vecteur orthogonal à la fois au vecteur $\mathbf{A}$ et au vecteur $\mathbf{B}$ et par conséquent normal au plan contenant les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Sa norme vaut :

$$\|\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\times\|\mathbf{B}\|\times\sin(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}) = A\,B\,\sin(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}})$$

où $(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}})$ est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.



Le vecteur $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ est orienté selon la *règle de la main droite* ($\mathbf{A}$ selon l'index, $\mathbf{B}$ selon le majeur, le produit $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ selon la direction du pouce), aussi connue en physique comme la règle du *Bonhomme d'Ampère*. Les vecteurs $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$ forment ainsi un trièdre direct.

Propriétés. Le produit vectoriel est **anti-commutatif** : $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} = -\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

Le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est toujours nul.

Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}.$$

Deux vecteurs sont colinéaires si (et seulement si) leur produit vectoriel est nul.

Le module du produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ est égal à l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Expression dans une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Dans une base orthonormée orientée directe $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, les produits vectoriels des vecteurs de la base entre eux s'écrivent :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{0} & \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_y = \mathbf{0} & \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z & \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y. \end{array}$$

On peut ainsi en déduire les composantes du produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ sur la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = B_x\,\mathbf{e}_x + B_y\,\mathbf{e}_y + B_z\,\mathbf{e}_z$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \; & (A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z) \wedge (B_x\,\mathbf{e}_x + B_y\,\mathbf{e}_y + B_z\,\mathbf{e}_z) \\ = \; & A_xB_x\;\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_x + A_xB_y\;\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y + A_xB_z\;\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z + \\ & A_yB_x\;\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x + A_yB_y\;\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_y + A_yB_z\;\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z + \\ & A_zB_x\;\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x + A_zB_y\;\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_y + A_zB_z\;\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_z \\ = \; & (A_yB_z - A_zB_y)\,\mathbf{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\mathbf{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Les composantes du produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} : \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix}.$$

Double produit vectoriel. Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\;\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\;\mathbf{C}.$$