

PHYTEM– LP353 – RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN – CORRIGÉ

Année Universitaire 2017–2018

Mercredi 15 novembre 2017, 9h00 – 12h00

1. Transformations de Lorentz, vitesse, énergie et impulsion

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen \mathcal{R} à un autre référentiel galiléen \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} . Écrivez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} était selon l'axe Oz au lieu de Ox , i.e. $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Les relations précédentes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{array} \right.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe Ox : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$.

1.3 — Déduisez-en les lois de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' .

À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

1.4 — Précisez les cas limites intéressants.

D'une part, on montre facilement que pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière, la loi de composition des vitesses tend vers la limite classique :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \simeq u'_x + v \quad \text{quand} \quad u'_x \ll c \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'autre part, on constate immédiatement que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : par exemple, quand $u'_x = c$, on obtient alors dans le référentiel \mathcal{R} :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

De même, lorsque $v = c$, on aura alors $u_x = c$.

1.5 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel \mathcal{R}' . Sa vitesse u mesurée dans un référentiel \mathcal{R} tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses \mathbf{u} , \mathbf{u}' et \mathbf{v} colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Posons $a = u'/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u'}{c} < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leq a < 1$, on en déduit que $0 < 1 - a \leq 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - a) > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \quad \text{d'où} \quad \beta - a\beta < 1 - a \quad \text{soit} \quad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

$$\frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \quad \text{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel \mathcal{R}' , sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c .

1.6 — Donnez la loi de transformation de l'intervalle de temps dt . Commentez. Qu'est-ce que le temps propre τ ?

Pour deux événements se produisant au même point dans \mathcal{R}' , séparés par un petit intervalle de temps dt' , on aura $dx' = \gamma(dx - \beta c dt) = 0$, et donc $dx = \beta c dt = vt$. L'intervalle de temps dt' vaut ainsi :

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) = \gamma(1 - \beta^2)dt = \frac{1}{\gamma}dt \quad \text{d'où} \quad dt = \gamma dt' > dt'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel \mathcal{R}' .

Pour un observateur, le temps $d\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $dt = \gamma d\tau > d\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $ds^2 = c^2 d\tau^2$.

1.7 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ du point matériel M. Comment ses composantes U^μ se transforment-elles lorsqu'on passe de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ? Que vaut la pseudo-norme de $\tilde{\mathbf{U}}$? Est-ce un invariant ?

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2.$$

1.8 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur accélération $\tilde{\mathbf{A}}$ du point matériel M. Montrez rapidement que sa pseudo-norme carrée $\tilde{\mathbf{A}}^2 = A_\mu A^\mu$ vaut $-a^2$ où a est l'accélération propre mesurée dans le référentiel inertiel instantané (référentiel tangent).

Le quadrivecteur accélération $\tilde{\mathbf{A}}$ est la dérivée du quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ , on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{dt} \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2(u) \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Si on se place dans le référentiel tangent à l'objet en mouvement, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse \mathbf{u} est nulle et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, on trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{A}}$ vaut $\tilde{\mathbf{A}}^2 A_\mu A^\mu = -a^2$, où \mathbf{a} est l'accélération propre (i.e. mesurée dans le référentiel propre de l'objet).

1.9 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ du point matériel M. Retrouvez l'expression de ses composantes et les identités remarquables associées (pseudo-norme, expressions simples de β et γ en fonction des composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$, etc).

À partir du quadrivecteur vitesse, on construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m \tilde{\mathbf{U}} \quad p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2 c^2 = (mc^2)^2 / c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = p^\mu p_\mu = (mc^2)^2 / c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e.} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

2. L'attaque de l'Étoile Noire

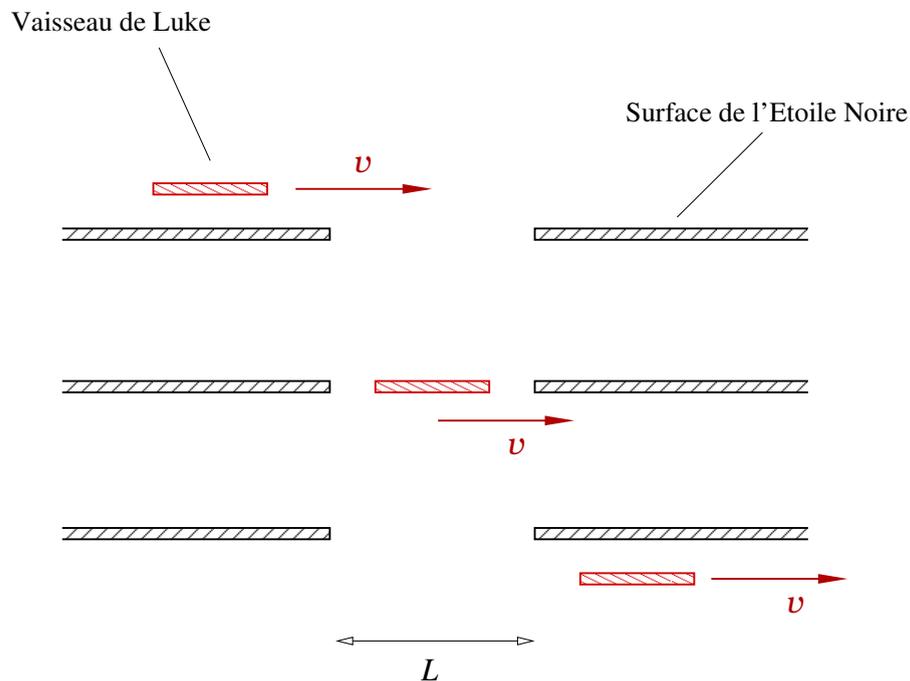


FIGURE 1 – Plan d'attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l'Étoile Noire.

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur L) par un orifice de l'Étoile de même diamètre L (figure 1). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$, Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur L .

2.1 — Que vaut le facteur $\gamma(v)$ du vaisseau de Luke dans le référentiel de l'Étoile Noire (supposé galiléen) ?

La vitesse du vaisseau étant $v = \sqrt{3}c/2$, le facteur $\gamma(v)$ correspondant vaut :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2.$$

2.2 — Dans le référentiel de l'Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite) ? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l'ouverture de diamètre L ?

Dans le référentiel de l'Étoile Noire, le vaisseau de Luke apparaît plus court. Sa longueur est réduite d'un facteur $1/\gamma(v)$: la longueur du vaisseau dans le référentiel de l'Étoile Noire est par conséquent de $L/\gamma(v)$ soit $L/2$. Le vaisseau doit donc pouvoir passer facilement par le trou de diamètre L .

2.3 — L'amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c'est le trou à la surface de l'Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l'échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau de Luke ?

Dans le référentiel de Luke, la vitesse de la surface de l'Étoile Noire est $-v$, et le facteur γ associé vaut 2 (on suppose ici le mouvement du vaisseau parallèle à la surface). La longueur de l'orifice est

donc réduite d'un facteur $1/\gamma(v) = 1/2$, et vaut $L/\gamma(v) = L/2$. On peut alors légitimement se demander comment le vaisseau pourrait passer par le trou qui est deux fois plus petit que le vaisseau...

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l'Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

- Le référentiel \mathcal{R} représenté sur la figure 2 : dans \mathcal{R} , la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon e_z avec une vitesse faible $u \ll c$. À $t = 0$, la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan xOy . Dans ce même référentiel \mathcal{R} , le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe Ox , à la vitesse $\mathbf{v} = v e_x$, de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine O à $t = t' = 0$.
- Le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R} : $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v e_x$. L'origine O' du référentiel \mathcal{R}' est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec O à $t = t' = 0$.

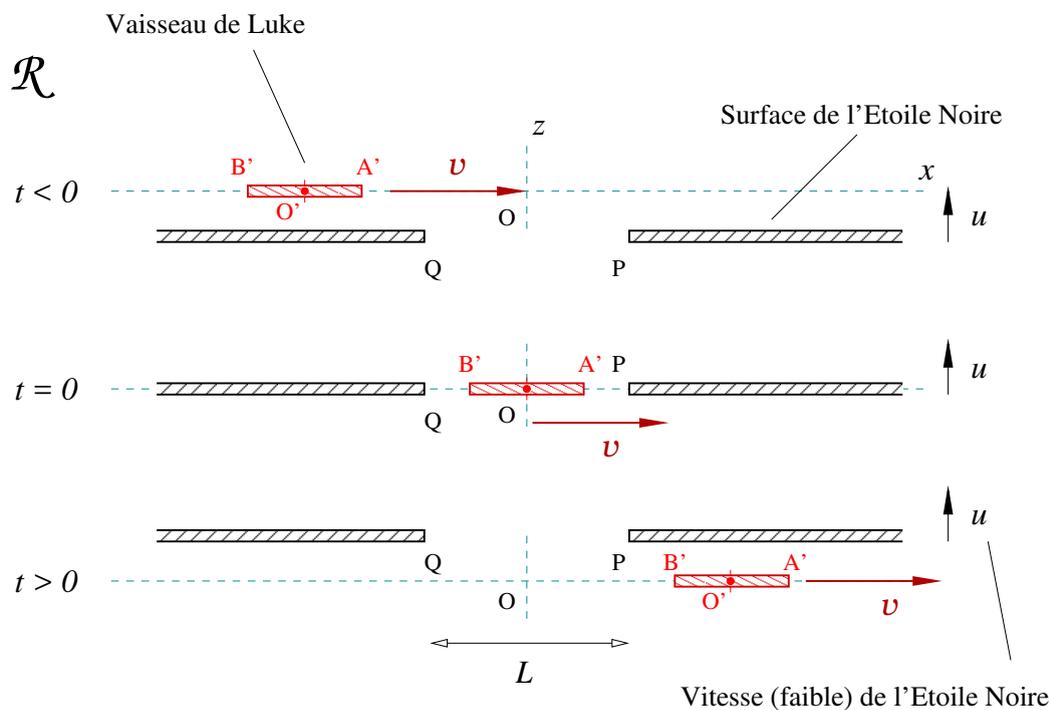


FIGURE 2 – Plan d'attaque de Luke pour détruire l'étoile noire, vu dans le référentiel \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x , tandis que la surface de l'Étoile Noire se déplace à la vitesse faible $u \ll c$ selon l'axe des z .

2.4 — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' . De même, écrivez la transformation inverse.

La transformation de Lorentz pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}' s'écrit (avec $\beta = v/c$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

2.5 — Dans le référentiel \mathcal{R} , quelle est la position $x(O')$ du centre du vaisseau en fonction du temps t ? À $t = 0$, que valent les abscisses des extrémités avant $x(A')$ et arrière $x(B')$ du vaisseau, dans le référentiel \mathcal{R} ? Au même instant $t = 0$, que valent les abscisses $x(P)$ et $x(Q)$ des extrémités du trou? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou?

Dans le référentiel du vaisseau \mathcal{R}' , le centre du vaisseau est pris pour origine : $x'(O') = 0$. En appliquant la transformation de Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(O') = \gamma (x(O') - vt) = 0$$

D'où on déduit la position de O' dans \mathcal{R} ,

$$x(O') = vt$$

On peut raisonner de même pour les extrémités A' et B' du vaisseau. Dans le référentiel du vaisseau \mathcal{R}' , on a :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} \quad \text{et} \quad x'(B') = -\frac{L}{2}$$

En appliquant Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} = \gamma (x(A') - vt) \quad x'(B') = -\frac{L}{2} = \gamma (x(B') - vt)$$

D'où,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = +\frac{L}{4} + vt \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = -\frac{L}{4} + vt$$

Et en particulier, à $t = 0$,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = +\frac{L}{4} \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = -\frac{L}{4}$$

Par ailleurs, dans le référentiel \mathcal{R} , les extrémités P et Q du trou sont fixes, aux abscisses $x(P) = +L/2$ et $x(Q) = -L/2$. Il paraît donc évident que dans le référentiel \mathcal{R} , le vaisseau passe sans difficulté à travers le trou (fig. 2).

On s'intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du vaisseau.

2.6 — Dans le référentiel \mathcal{R}' dessinez dans le plan $x'O'z'$ le vaisseau de longueur L , en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l'on complétera aux questions suivantes.

Le vaisseau est fixe dans le référentiel \mathcal{R}' : voir figure 3 ci-après.

2.7 — Soit un point $M(x, y, z)$ quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement x dans l'intervalle $] -\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$. Que vaut z en fonction du temps t dans \mathcal{R} ?

Dans le référentiel \mathcal{R} , tous les points de la surface de l'Étoile Noire se déplacent en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_z$. Pour tous les points $M(x, y, z)$ de la surface, on a donc simplement $z = ut$.

2.8 — Déterminez les coordonnées (x', y', z') des points M de la surface de l'Étoile Noire en fonction du temps t' dans \mathcal{R}' . Quel est le lieu des points M de la surface à l'instant $t' = 0$ dans le plan $x'O'z'$? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ sur le dessin précédent.

Pour tout point $M(x, y, z)$ appartenant à la surface de l'Étoile Noire, on a $x \in]-\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$, et $z = ut$. Si on écrit la transformation de Lorentz inverse,

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ x = \gamma (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' = ut \end{cases} \quad \text{où} \quad t = \frac{z}{u} = \frac{z'}{u}.$$

Et par conséquent, en utilisant les deux équations donnant t ,

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \frac{z'}{u} \quad \text{soit} \quad z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

Dans le référentiel du vaisseau, à un instant t' donné, les points $M(x', y', z')$ de la surface de l'étoile noire appartiennent au plan défini par l'équation :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

En particulier, à $t' = 0$, il s'agit du plan :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2}.$$

La pente de l'intersection de la surface avec le plan $x'O'z'$ vaut

$$+\gamma \frac{vu}{c^2} = +\sqrt{3} \frac{u}{c} \ll 1.$$

Cette pente est évidemment très petite car $u \ll c$ (voir fig. 3).

2.9 — Que valent les coordonnées des extrémités P et Q du trou dans le référentiel \mathcal{R} ? Déduisez-en l'équation de la trajectoire $z' = f(x')$ pour chacun de ces deux points dans le référentiel \mathcal{R}' .

Dans le référentiel \mathcal{R} , les extrémités P et Q du trou ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(P) = +\frac{L}{2} \\ z(P) = ut \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(Q) = -\frac{L}{2} \\ z(Q) = ut \end{cases}$$

En appliquant Lorentz, et en utilisant $t = z/u = z'/u$, on trouve :

$$x'(P) = \gamma(x(P) - vt) = \gamma \left(x(P) - \frac{vz'}{u} \right) = \gamma \left(\frac{L}{2} - \frac{vz'}{u} \right)$$

Et, de même,

$$x'(Q) = \gamma(x(Q) - vt) = \gamma \left(x(Q) - \frac{vz'}{u} \right) = \gamma \left(-\frac{L}{2} - \frac{vz'}{u} \right)$$

Ce qui donne la trajectoire des points P et Q dans le plan $x'O'z'$:

$$\begin{cases} z'(P) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{u}{v} \frac{L}{2} \\ z'(Q) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{u}{v} \frac{L}{2} \end{cases}$$

La pente de ces trajectoires vaut :

$$-\frac{u}{\gamma v} = -\frac{u}{2 \times c\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{u}{c} \quad \text{avec} \quad \frac{u}{c} \ll 1$$

Pour le dessin, on notera que cette pente est négative, et qu'elle vaut en norme le tiers de la pente (positive) trouvée précédemment pour le plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ (fig. 3).

2.10 — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités P et Q avec l'axe des x' . Dessinez les trajectoires de P et Q dans le plan $x'O'z'$.

En utilisant les équations des trajectoires des points P et Q , et on trouve immédiatement l'intersection de ces trajectoires avec l'axe des x' , en posant respectivement $z'(P) = 0$ et $z'(Q) = 0$.

L'intersection de la trajectoire de P avec l'axe des x' a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{uL}{v2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(P) = \gamma \frac{L}{2} = L.$$

Et pour Q , elle a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{uL}{v2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(Q) = -\gamma \frac{L}{2} = -L.$$

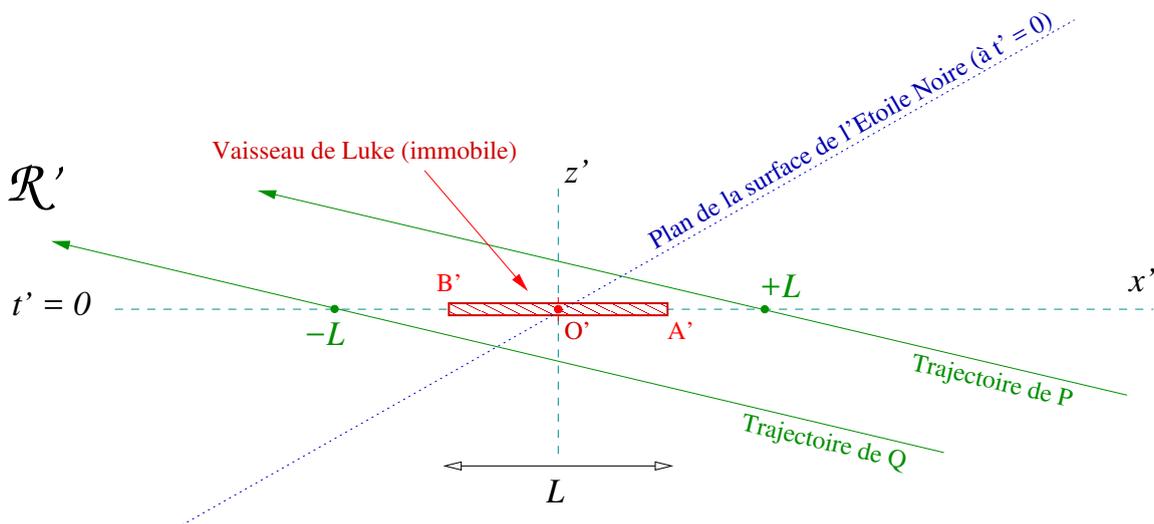


FIGURE 3 – Point de vue dans le référentiel du vaisseau, à $t' = 0$. Les points de la surface de l'Étoile Noire, appartiennent au plan d'équation $z' = \gamma v u x' / c^2$ avec $u \ll c$. Les trajectoires des extrémités du trou P et Q sont aussi représentées : l'intersection de la trajectoire de P avec l'axe des x' se produit en $x' = +L$, et celle de la trajectoire de Q avec l'axe des x' se produit en $x' = -L$.

2.11 — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke ? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte ?

Dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du vaisseau, la surface de l'Étoile Noire apparaît inclinée ; même si la longueur du trou est inférieure à L , le mouvement de la surface est tel que le passage du vaisseau dans le trou est possible, et qu'aucune collision n'a lieu (figure 4). Luke a donc raison, et dans la

mesure où son vaisseau peut être assimilé à un segment de droite de longueur L , il pourra franchir la surface de l'Étoile Noire.

Cet exercice est une déclinaison du célèbre problème relativiste connu comme "le paradoxe de la règle et du trou".

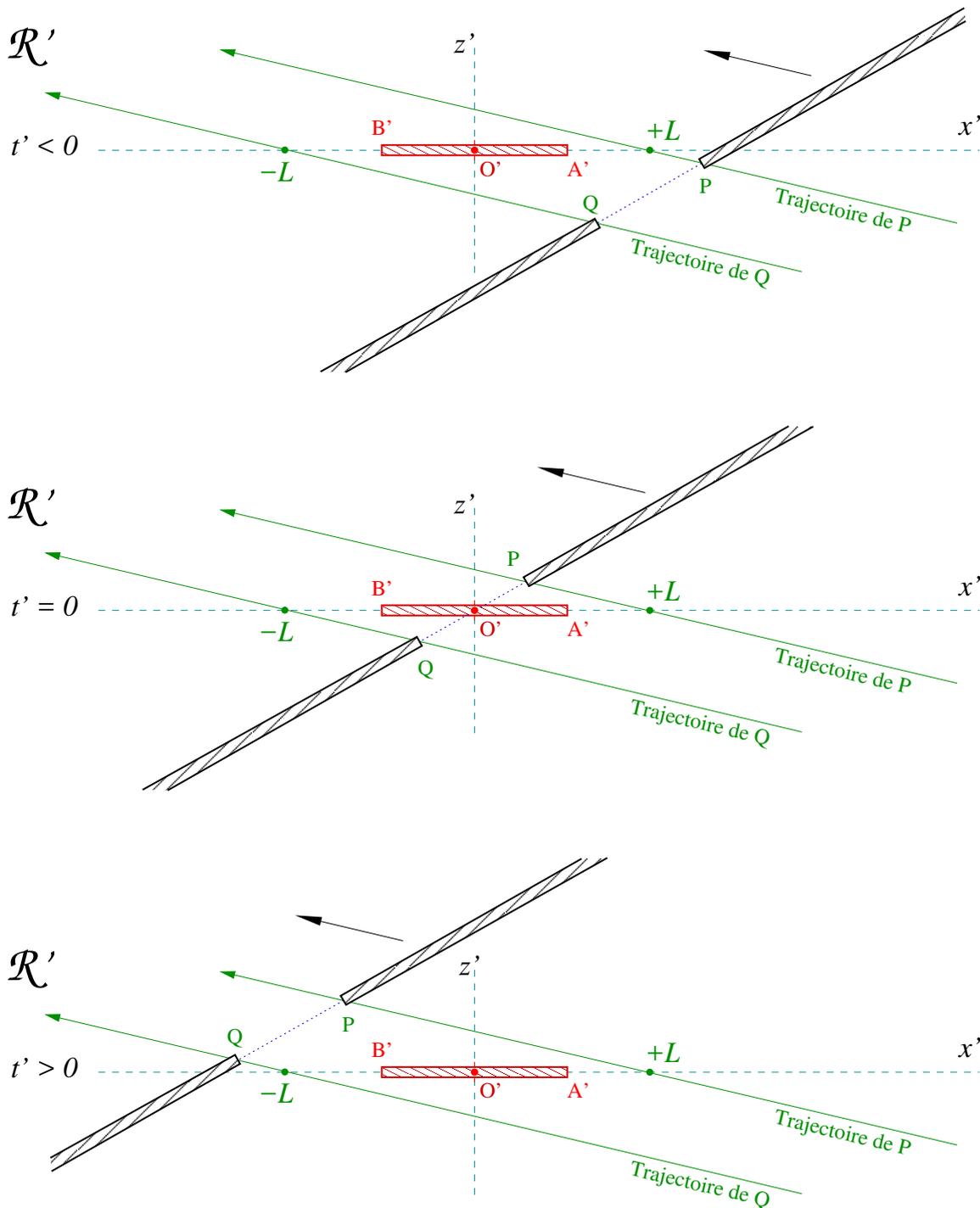


FIGURE 4 – Succession des événements dans le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau. L'orifice dans la surface de l'Étoile Noire est effectivement plus petit que la longueur L du vaisseau, mais la surface apparaît inclinée dans \mathcal{R}' , de telle sorte que le vaisseau passe sans difficulté.

3. La physique au Large Hadron Collider (LHC)

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le *Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons W^+ , W^- et Z ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Le boson de Higgs a été mis en évidence au *Large Hadron Collider* dans des collisions de protons dont l'énergie cinétique est de plusieurs téra-électrons-volts (TeV). Pour atteindre cette énergie, les protons sont injectés et accélérés dans une succession d'accélérateurs de plus en plus puissants (fig. 5). Les faisceaux de protons entrent en collision en 4 points du LHC, où sont placés 4 énormes détecteurs de particules dédiés : ATLAS, CMS, LHCb et ALICE.

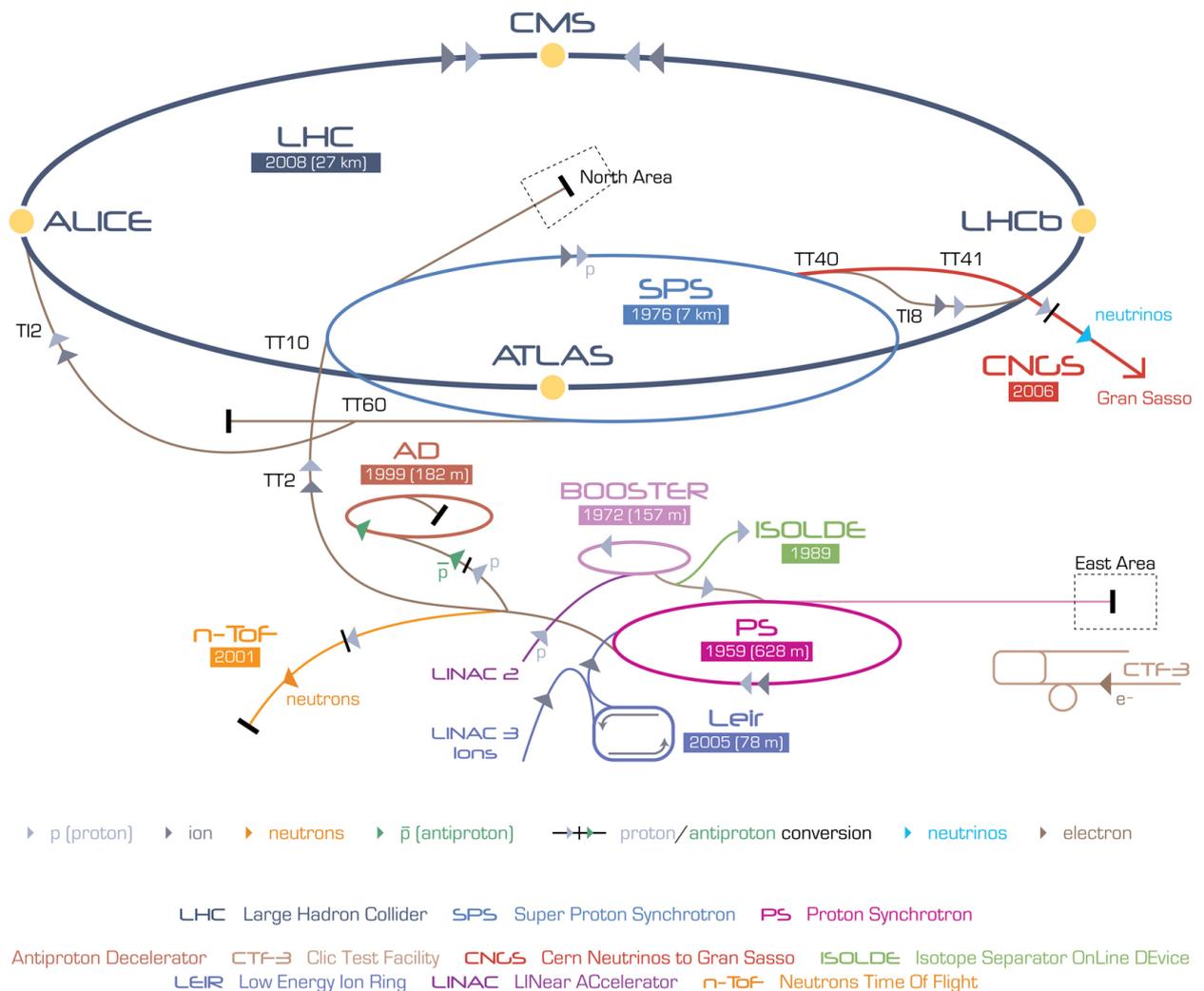


FIGURE 5 – Structure des accélérateurs de particules du CERN (Genève). Les protons sont d'abord accélérés dans l'accélérateur linéaire "LINAC 2" ($T = 50$ MeV), puis injectés et accélérés dans le synchrotron "PS Booster" ($T = 1.4$ GeV), puis dans le PS ($T = 25$ GeV), le SPS ($T = 450$ GeV) et enfin le LHC lui-même ($T = 7$ TeV).

Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

La source des protons du LHC est une bouteille d'hydrogène gazeux, située à l'entrée du LINAC 2. L'hydrogène est soumis à un champ électrique, qui arrache ses électrons afin de ne laisser entrer dans l'accélérateur que les protons.

Dans sa forme la plus simple, un accélérateur linéaire LINAC consiste en un tube à vide contenant une succession de cylindres conducteurs, dont les charges électriques alternent (fig. 6). Les particules chargées sont injectées par paquets, et on inverse périodiquement la charge électrique des conducteurs cylindriques, afin de toujours accélérer les particules lors du franchissement de l'espace séparant deux cylindres de charges opposées (région de champ électrique uniforme E_{kin} sur la figure).

On se propose dans cette première partie de calculer dans le cadre relativiste le comportement d'une particule accélérée sous l'effet d'un champ électrique uniforme.

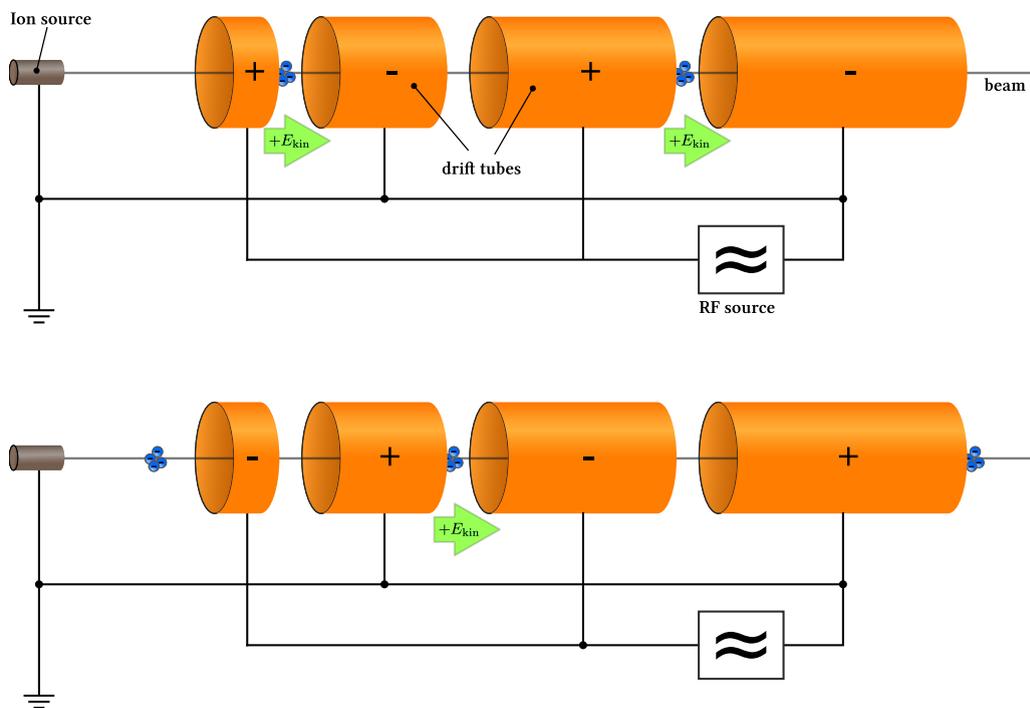


FIGURE 6 – Principe de fonctionnement d'un accélérateur linéaire (LINAC) dans sa forme la plus simple. Les particules sont injectées par paquets (pulses). Les cylindres conducteurs portent des charges électriques alternées, que l'on inverse périodiquement. Lorsque les particules passent d'un cylindre au suivant, elles subissent le champ électrique E_{kin} : l'inversion périodique des charges des cylindres permet de toujours accélérer les particules dans le même sens.

3.1 — Question de cours : à partir de l'équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En partant de sa forme covariante, on explicite l'équation en faisant varier l'indice ν de 0 à 3.

Pour $\nu = 0$, on obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où on reconnaît l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Explicitons maintenant l'équation sous forme covariante pour $\nu = 1$. On obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 = \mu_0 j_x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j_x \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

où on reconnaît la composante selon x de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En faisant de même pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

3.2 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes contravariantes p^μ et covariantes p_μ .

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m \tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e. } E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

3.3 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\tilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\tilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie E de la particule et de sa quantité de mouvement \mathbf{p} .

$\tilde{\mathbf{f}}$ est la dérivée d'un quadrivecteur par rapport au temps propre τ , qui est un invariant de Lorentz : ses composantes se transforment donc bien selon Lorentz, et $\tilde{\mathbf{f}}$ possède bien les propriétés d'un quadrivecteur.

On a donc :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = \gamma(u) \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt}$$

Pour les composantes contravariantes, cela donne :

$$f^\mu = \gamma(u) \frac{dp^\mu}{dt} \quad \text{avec} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

D'où

$$f^\mu = \left(\gamma(u) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

3.4 — Montrez que pour une particule de quadrivitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ subissant une quadriforce $\tilde{\mathbf{f}}$, on a $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$. Déduisez-en que :

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(u)m\mathbf{u})}{dt}$$

Le quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ vérifie :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{d\tilde{\mathbf{U}}^2}{d\tau} = 2 \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0$$

Or, le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ peut encore s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{d'où} \quad \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$$

Si on explicite cette dernière relation avec les composantes f^μ et U_μ , on trouve :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = \gamma^2(u) \left[\frac{dE}{dt} - \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} \right] = 0$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

On retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'une particule par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

3.5 — Donnez explicitement $F^{\mu\nu}$ dans la région de l'espace où $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

Dans le référentiel du laboratoire, les composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$ du tenseur du champ électromagnétique se réduisent à :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une particule de charge q placée dans le champ : on note $\tilde{\mathbf{r}}$ sa position, \mathbf{u} son vecteur vitesse et $\tilde{\mathbf{U}}$ sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadri-force de Lorentz $\tilde{\mathbf{f}}$ qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu. \tag{1}$$

3.6 — Rappelez l'expression des composantes contravariantes U^μ et covariantes U_μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$.

Le quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ est défini par :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Et ses composantes covariantes sont :

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ -\gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

3.7 — À partir de l'équation (1), donnez explicitement les composantes f^0 , f^1 , f^2 et f^3 du quadrivecteur $\tilde{\mathbf{f}}$.

Les composantes contravariantes f^μ du quadrivecteur force de Lorentz $\tilde{\mathbf{f}}$ vérifient :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu.$$

Écrivons explicitement chaque composante. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f^0 &= qF^{00} U_0 + qF^{01} U_1 + qF^{02} U_2 + qF^{03} U_3 = \gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c} \\ f^1 &= qF^{10} U_0 + qF^{11} U_1 + qF^{12} U_2 + qF^{13} U_3 = \gamma(u)qE_x \\ f^2 &= qF^{20} U_0 + qF^{21} U_1 + qF^{22} U_2 + qF^{23} U_3 = 0 \\ f^3 &= qF^{30} U_0 + qF^{31} U_1 + qF^{32} U_2 + qF^{33} U_3 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x \mathbf{e}_x \right)$$

3.8 — Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie E et la quantité de mouvement \mathbf{p} de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

D'après la question précédente, la force de Lorentz s'écrit ici :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x \mathbf{e}_x \right)$$

Or, on a par ailleurs :

$$f^\mu = \left(\gamma(u) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

En identifiant, on trouve immédiatement :

$$qE_x \frac{u_x}{c} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = qE_x \mathbf{e}_x.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = qE_x \mathbf{e}_x \quad \text{soit} \quad \frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x.$$

3.9 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Déduisez-en l'expression de la vitesse u en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité φ).

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers quelle valeur tend u ? Comparez avec le cas classique.

À partir de l'équation précédente,

$$d(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt$$

Ce qui donne, en intégrant,

$$\gamma(u)\mathbf{u} = \gamma(u(t=0))\mathbf{u}(t=0) + \int_0^t \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt = \frac{qE_x t}{m} \mathbf{e}_x$$

La vitesse \mathbf{u} est par conséquent selon \mathbf{e}_x : $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$. En remplaçant $\gamma(u)$ par son expression,

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE_x t}{m} = at$$

en posant $a = qE_x/m$. Ce qui donne :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

Pour de grandes valeurs de t , autrement dit au bout d'un temps assez long, la vitesse de la particule accélérée tend vers c :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2 t^2}}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c$$

Dans le traitement classique de ce phénomène, l'accélération de la particule serait $du/dt = qE_x/m = a$, et on obtiendrait une trajectoire rectiligne uniformément accélérée :

$$u = at = \frac{qE_x}{m} t \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2} at^2$$

La description classique n'interdit donc pas à la particule d'atteindre au bout d'un temps $t = c/a$ la vitesse de la lumière, puis de la dépasser. Le traitement relativiste du même problème physique interdit cela, en accord avec l'expérience.

3.10 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t . On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh} \beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

D'après ce qui précède, la vitesse $u(t)$ s'écrit :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = c \tanh \varphi$$

En se souvenant que $\gamma(u) = \cosh \varphi$ et que $\beta\gamma = \sinh \varphi$, on trouve :

$$\cosh \varphi = \gamma(u) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad \sinh \varphi = \sqrt{\cosh^2 \varphi - 1} = \frac{at}{c}$$

De l'équation différentielle précédente,

$$d(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt = a, \mathbf{e}_x dt$$

on tire aussi une relation entre φ et t :

$$d(\gamma(u)u) = c d(\cosh \varphi \tanh \varphi) = a dt \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{c}{a} d(\sinh \varphi) = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi$$

On peut désormais exprimer dx en fonction de φ :

$$dx = u dt = \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c^2 \sinh \varphi \cosh \varphi d\varphi}{a \cosh \varphi} = \frac{c^2}{a} \sinh \varphi d\varphi$$

D'où on déduit, en intégrant le long de la trajectoire :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dx = \frac{c^2}{a} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \sinh \varphi d\varphi = \frac{c^2}{a} [\cosh \varphi(t) - 1] = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

Ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) : r^\mu(t) = \left(ct, \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right], 0, 0 \right)$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve le résultat classique :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \simeq \frac{c^2}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} at^2$$

Collisions proton-proton dans un collisionneur symétrique

Le LHC est un collisionneur symétrique : dans le référentiel du laboratoire, les protons incidents possèdent la même énergie E et des impulsions opposées de même norme p (fig. 7).

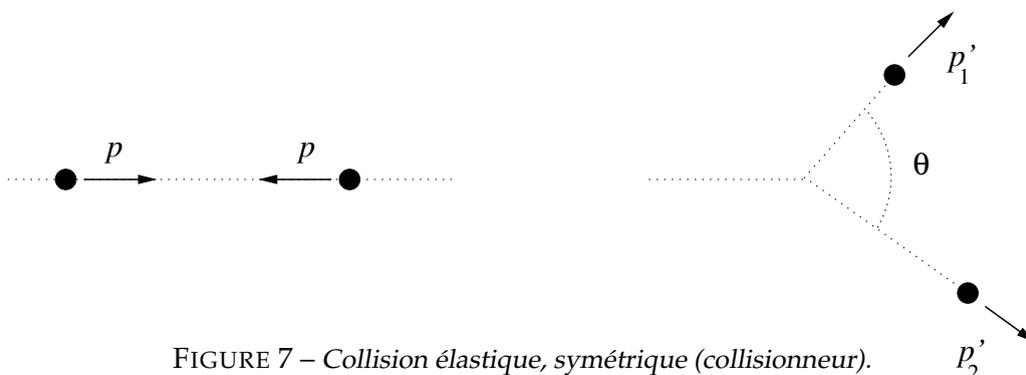


FIGURE 7 – Collision élastique, symétrique (collisionneur).

3.11 — Dans l’hypothèse d’une collision élastique, écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

Comme précédemment, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 \quad (2)$$

Avec, dans le référentiel du laboratoire :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_1 : p_1'^\mu = \begin{pmatrix} E'_1/c \\ \mathbf{p}'_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_2 : p_2'^\mu = \begin{pmatrix} E'_2/c \\ \mathbf{p}'_2 \end{pmatrix}$$

3.12 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système \mathcal{R}^* ?

De manière immédiate, on constate dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire que l’impulsion totale est nulle avant la collision. Elle sera donc aussi nulle après la collision, et le référentiel du laboratoire \mathcal{R} se confond avec celui du centre de masse du système \mathcal{R}^* .

3.13 — Que vaut nécessairement l’angle θ dans le référentiel \mathcal{R}^* ?

Avant comme après la collision de diffusion élastique, les deux protons ont des vecteurs quantité de mouvement opposés dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* (qui est aussi celui du laboratoire) :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 \quad \mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$$

Par conséquent, dans le référentiel \mathcal{R}^* , l’angle entre les deux protons après diffusion est nécessairement égal à π .

3.14 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l’énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , en fonction de l’énergie cinétique T et de la masse m des protons ?

Par définition, la masse invariante du système s’écrit :

$$\frac{(E^*)^2}{c^2} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2]^2 = \left(\frac{E}{c} + \frac{E}{c} \right)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p})^2 = \frac{4E^2}{c^2} = 4 \frac{[T + mc^2]^2}{c^2}$$

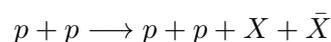
L’énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est donc :

$$E^* = 2E = 2 [T + mc^2]$$

Collision inélastique : production d’une paire $X \bar{X}$

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l’objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction inélastique suivante, qui vise à produire une paire de particules quelconques X et \bar{X} (X et son anti-particule) de mêmes masses m_X en faisant collisionner des protons p (on suppose ici les protons intacts après la collision, ce qui n’est généralement pas le cas pour les collisions intéressantes au LHC) :



3.15 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion pour cette réaction.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit (sans développer) :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 + \tilde{\mathbf{p}}_X + \tilde{\mathbf{p}}_{\bar{X}}$$

3.16 — Exprimez la masse invariante du système, avant et après la réaction.

La masse invariante M^* du système s'écrit :

$$(M^*)^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 + \tilde{\mathbf{p}}_X + \tilde{\mathbf{p}}_{\bar{X}})^2$$

Si on développe l'expression avant la collision, on trouve, exprimée dans le référentiel du laboratoire (qui est aussi le référentiel propre ici) :

$$(M^*)^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = 2m^2 c^2 + 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

Comme les deux protons ont la même énergie $E_1 = E_2 = E = mc^2 + T$, et des impulsions opposées $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ et de même norme p ,

$$(M^*)^2 c^2 = 2m^2 c^2 + 2\frac{E^2}{c^2} + 2p^2 = 4\frac{E^2}{c^2}$$

Ce qui donne la masse invariante M^* et l'énergie totale disponible E^* dans le centre de masse :

$$M^* = \frac{2E}{c^2} \quad \text{et} \quad E^* = M^* c^2 = 2E = 2(T + mc^2).$$

3.17 — Déterminer l'énergie cinétique minimale T qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire une particule X de masse m_X et son antiparticule \bar{X} de même masse (en supposant les protons intacts après la collision).

Dans une collision symétrique, l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est :

$$E^* = 2E = 2[T + mc^2]$$

Pour produire une particule X et son antiparticule \bar{X} en conservant les 2 protons, il faut $E^* > 2mc^2 + 2m_X c^2$, c'est à dire :

$$2E = 2[T + mc^2] > 2mc^2 + m_X c^2 \quad \text{i.e.} \quad T > m_X c^2.$$

Détection du boson de Higgs dans le canal $\gamma\gamma$

Si l'énergie dans le centre de masse est suffisante, il est possible de produire un boson de Higgs dans la collision. Le boson de Higgs est instable et peut se désintégrer de différentes manières (on parle de "voies" ou de "canaux de désintégration"). Il peut par exemple se désintégrer en deux photons gamma (canal diphoton) : cette signature est l'une des plus faciles à mettre en évidence ("canal en or").

3.18 — Ecrivez l'équation-bilan de la désintégration du boson de Higgs (noté H) en deux photons gamma. On se place dans le référentiel du boson de Higgs \mathcal{R}_H : écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration.

L'équation de la désintégration du boson de Higgs en deux photons s'écrit :

$$H \longrightarrow \gamma + \gamma$$

Du fait de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où $\tilde{\mathbf{p}}_H$, $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_2$ sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion du boson de Higgs avant sa désintégration, et des deux photons issus de sa désintégration.

Dans le référentiel du boson de Higgs \mathcal{R}_H , leurs composantes contravariantes sont :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H : p_H^\mu = \begin{pmatrix} m_H c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 : q_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar\mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 : q_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar\mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

Par conservation du vecteur quantité de mouvement, on a nécessairement

$$\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \hbar\mathbf{k}_2 = -\hbar\mathbf{k}_1.$$

On en déduit que les deux photons sont émis dos à dos dans le référentiel \mathcal{R}_H , avec des impulsions opposées ; ils ont par conséquent la même énergie $E_\gamma = E_1 = E_2$ dans \mathcal{R}_H .

3.19 — Que vaut la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ du système formé par les deux photons issus de la désintégration du Higgs ? Quelle est l'énergie de chaque photon dans le référentiel du Higgs \mathcal{R}_H ? Que vaut nécessairement l'angle entre les deux photons émis dans \mathcal{R}_H ?

D'après ce qui précède, dans \mathcal{R}_H les deux photons sont émis dos à dos, avec la même énergie et des impulsions opposées. L'angle entre les deux photons vaut nécessairement π .

Par conservation de l'énergie, on aura :

$$E_1 + E_2 = 2E_\gamma = m_H c^2 \quad \text{soit} \quad E_1 = E_2 = E_\gamma = \frac{m_H c^2}{2}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit dans \mathcal{R}_H :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} \right)^2 = 4 \frac{E_\gamma^2}{c^2}$$

Soit,

$$m_{\gamma\gamma}^2 = 4 \frac{E_\gamma^2}{c^4} \quad m_{\gamma\gamma} = 2 \frac{E_\gamma}{c^2} = m_H$$

3.20 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du Higgs en deux photons dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Exprimez la masse invariante en fonction des énergies E_1 et E_2 de chacun des deux photons et de l'angle θ_{12} entre les deux photons. Exprimez la masse m_H du boson de Higgs en fonction de E_1 , E_2 et θ_{12} .

Dans le référentiel du laboratoire, en réutilisant les même notations mais cette fois dans \mathcal{R} , on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H : p_H^\mu = \begin{pmatrix} E_H/c \\ \mathbf{p}_H \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 1} : q_{\gamma 1}^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar\mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 2} : q_{\gamma 2}^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar\mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

où E_H , E_1 et E_2 sont cette fois les énergies du Higgs et des deux photons dans le référentiel \mathcal{R} , et \mathbf{p}_H , $\hbar\mathbf{k}_1$ et $\hbar\mathbf{k}_2$ les quantités de mouvement du boson de Higgs et des deux photons.

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m_{\gamma\gamma}^2 c^2 &= (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{q}}_1^2 + \tilde{\mathbf{q}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 = 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 \\ &= 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\hbar^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2} \cos \theta_{12} \\ &= 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\frac{h^2 \nu_1 \nu_2}{c^2} \cos \theta_{12} = 2\frac{E_1 E_2}{c^2} [1 - \cos \theta_{12}] \\ m_{\gamma\gamma} &= \sqrt{\frac{2E_1 E_2}{c^4} (1 - \cos \theta_{12})} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme d'une part le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé (et donc sa pseudo-norme carrée), et que d'autre part la pseudo-norme carrée est un invariant de Lorentz, on a :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_H^2 = m_H^2 c^2 \quad \text{soit} \quad m_H = m_{\gamma\gamma}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons est donc toujours égale à la masse du boson de Higgs, quel que soit le référentiel dans lequel on mesure l'énergie des deux photons.

3.21 — La figure 8 représente la distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ pour les événements où sont apparus deux photons γ de haute énergie. Il s'agit du premier lot de mesures effectuées dans l'expérience ATLAS au LHC, ayant permis la découverte du Higgs. Déduisez-en la masse du boson de Higgs.

La distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ présente un excès autour de $m_{\gamma\gamma} \approx 126 \text{ GeV}/c^2$: la modélisation des processus connus produisant deux photons gamma ne permet pas d'en rendre compte. Cet excès est dû à la désintégration en deux photons d'une nouvelle particule, dont la masse est par conséquent $m_H = m_{\gamma\gamma} \approx 126 \text{ GeV}/c^2$. C'est le boson de Higgs, dont l'existence avait été prédite par Robert Brout, François Englert et Peter Higgs en 1964. Sa découverte dans les expériences ATLAS et CMS au LHC à valu le prix Nobel de physique 2013 à François Englert et Peter Higgs.

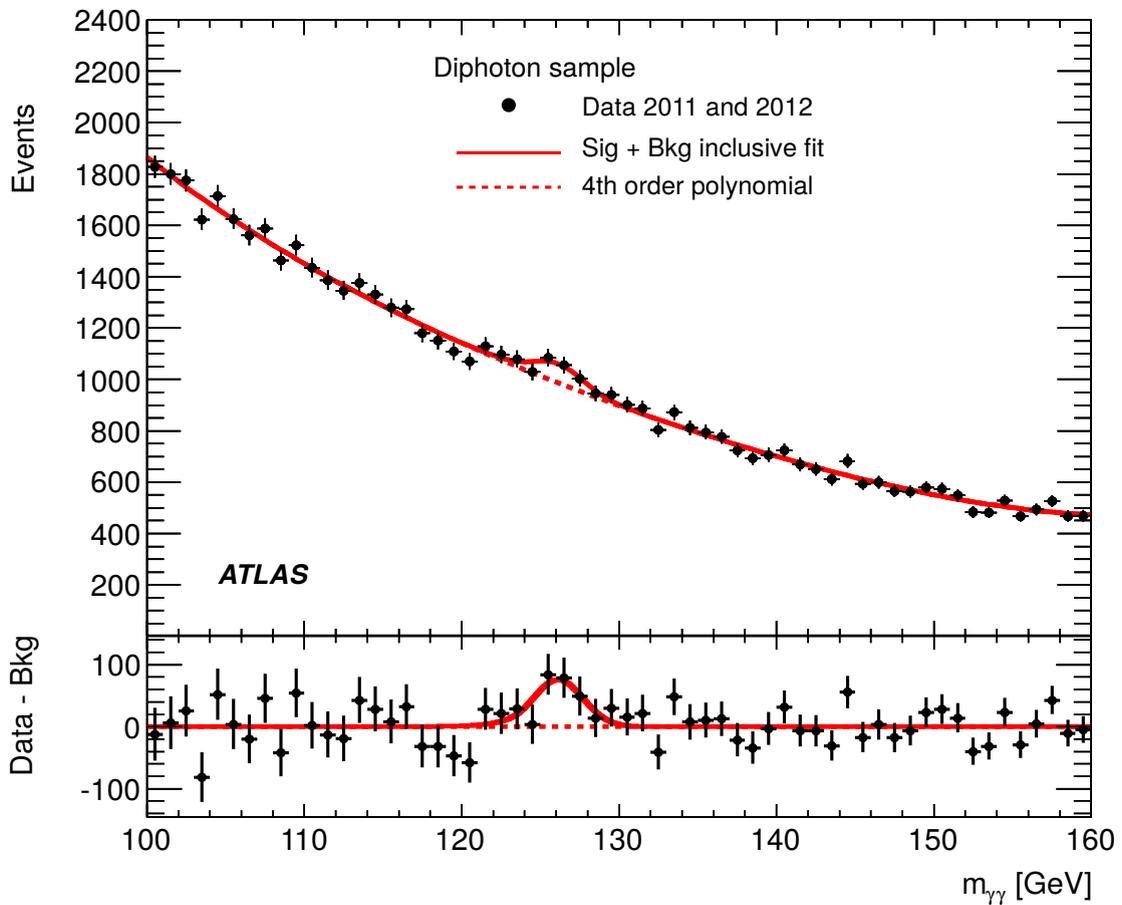


FIGURE 8 – Distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ mesurée pour tous les événements avec 2 photons de haute énergie dans l’expérience ATLAS au LHC (points noirs). En pointillés rouges, modélisation du fonds dû à toutes les autres réactions produisant principalement deux photons gamma. Première analyse du canal “diphoton”, thèse de doctorat de Heberth Torres (2013), LPNHE.

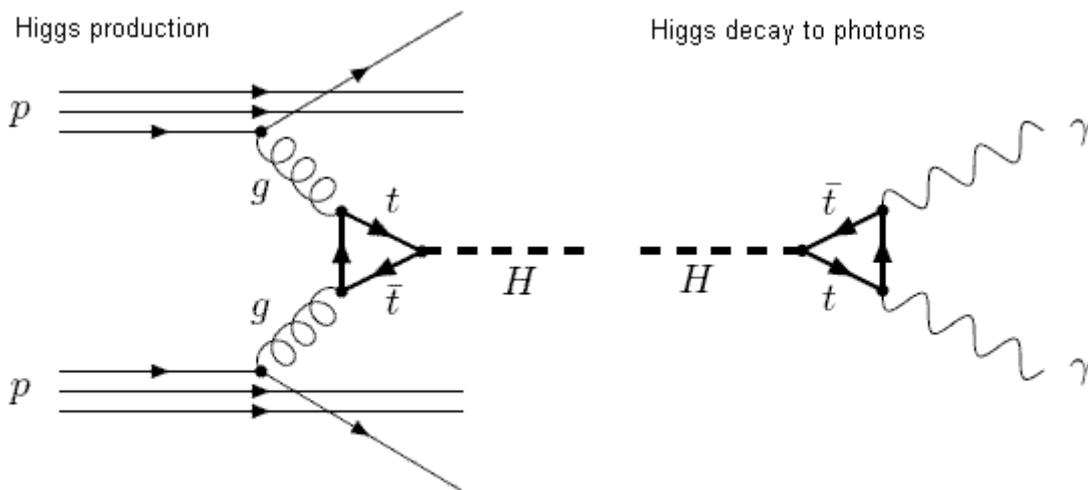


FIGURE 9 – Diagrammes de Feynman (le temps va de gauche à droite) : à gauche, production d’un boson de Higgs dans une collision de protons par fusion de gluons (les protons sont “détruits” dans ce type de collision) ; à droite, désintégration du boson de Higgs en deux photons.

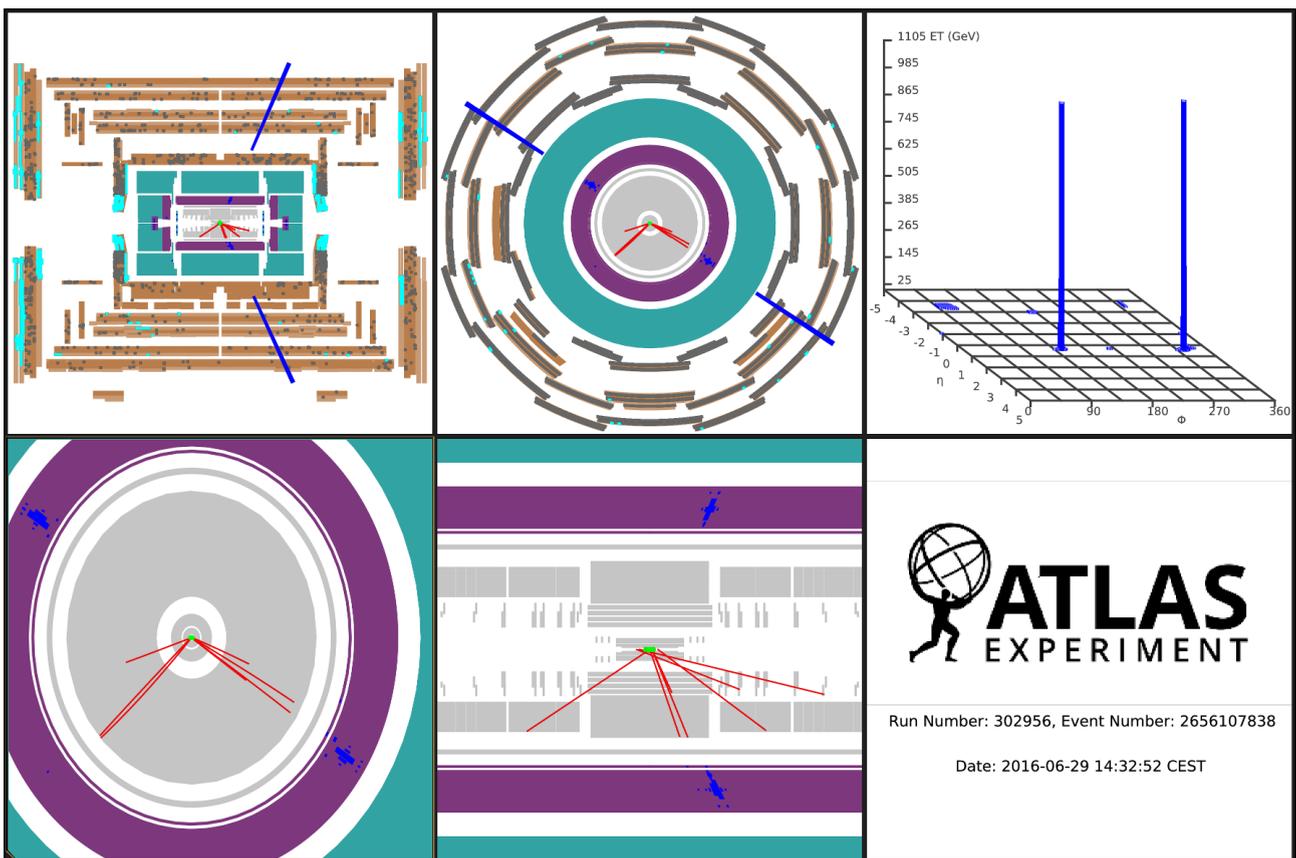


FIGURE 10 – Événement avec production de deux photons isolés de haute énergie dans l’état final. Expérience ATLAS, LHC. Les deux photons gamma se convertissent dans le détecteur, et forment deux gerbes de particules chargées (dépôts d’énergie indiqués en bleu)

4. Physique des tachyons

Le tachyon est une particule hypothétique dont la vitesse u est supérieure à c . En se basant uniquement sur cette hypothèse, on peut tenter de décrire les propriétés d’une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

4.1 — Montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R} on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$.

Considérons un tachyon se déplaçant à la vitesse $u > c$ dans un référentiel \mathcal{R} . Sa vitesse u' mesurée dans un référentiel \mathcal{R}' tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses \mathbf{u} , \mathbf{u}' et \mathbf{v} colinéaires) :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad \frac{u'}{c} = \frac{\frac{u}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c} \frac{v}{c}}$$

Posons $a = u/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u}{c} > 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Il est nécessaire de distinguer trois cas selon le signe du dénominateur.

a. Si $uv < c^2$, c’est à dire si $a\beta < 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est positif.

Comme $0 \leq \beta < 1$, on en déduit que $1 + \beta \geq 1 > 0$; en multipliant l’inégalité $a > 1$ par $1 + \beta > 0$, on obtient ainsi :

$$a(1 + \beta) > 1 + \beta \quad \text{d’où} \quad a + a\beta > 1 + \beta \quad \text{soit} \quad a - \beta > 1 - a\beta$$

Et par conséquent, comme $1 - a\beta > 0$,

$$\frac{u'}{c} = \frac{\frac{u}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c} \frac{v}{c}} = \frac{a - \beta}{1 - a\beta} > 1 \quad \text{i.e.} \quad u' > c$$

b. Si $uv > c^2$, c’est à dire si $a\beta > 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est négatif.

Comme $a > 1$, alors $1 + a > 2 > 0$. On peut donc multiplier l’inégalité $\beta < 1$ par $(1 + a)$, ce qui donne :

$$\beta(1 + a) < 1 + a \quad \text{d’où} \quad \beta + a\beta < 1 + a \quad \text{soit} \quad a\beta - 1 < a - \beta$$



FIGURE 11 – Tachyon en peluche, The Particle Zoo.

Et par conséquent, comme $a\beta - 1 > 0$,

$$\frac{a - \beta}{a\beta - 1} > 1 \quad \text{d'où, en multipliant par } -1, \quad \frac{u'}{c} = \frac{a - \beta}{1 - a\beta} < -1$$

C'est à dire : $u' < -c$. Dans ce cas, le tachyon se déplace dans la direction opposée, avec une vitesse supérieure à c en norme.

c. Enfin, si $uv = c^2$, la vitesse u' du tachyon dans le référentiel \mathcal{R}' est infinie.

Pour un tachyon de vitesse $u > c$ dans \mathcal{R} , sa vitesse u' dans \mathcal{R}' est toujours supérieure à c en norme. Un tachyon se déplace donc à une vitesse plus grande que c dans tous les référentiels galiléens.

4.2 — Sur un diagramme d'espace-temps, indiquez les axes x et t du référentiel \mathcal{R} . Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine $O(t = 0, x = 0)$ (Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).

Voir la figure 12.

4.3 — Sur ce diagramme, dessinez :

- la ligne d'espace-temps d'un objet immobile en $x = x_0$;
- la ligne d'espace-temps d'un objet se déplaçant à la vitesse constante $w < c$;
- la ligne d'espace-temps d'un photon émis vers l'avant au point événement $A(t_A, x_A)$ avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

Voir la figure 12.

4.4 — Dans le référentiel \mathcal{R} , un tachyon est émis en $A(t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en $B(t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d'univers (attention ! souvenez-vous que sa vitesse u est supérieure à c !).

Voir la figure 12.

4.5 — Quelle est la nature de l'intervalle d'espace-temps \widetilde{AB} ?

Posons :

$$\widetilde{AB} : \begin{pmatrix} \Delta t = c(t_B - t_A) \\ \Delta \mathbf{r} = \mathbf{AB} \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel \mathcal{R} , le tachyon se déplace à la vitesse $u > c$. On a donc

$$\widetilde{AB}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = (\Delta t)^2(c^2 - u^2) < 0 \quad \text{car } u > c$$

L'intervalle d'espace-temps \widetilde{AB} est par conséquent de **genre espace** (pas de lien causal possible entre les événements A et B).

4.6 — Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen \mathcal{R}' avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$: indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel \mathcal{R}' , la réception du tachyon (événement B) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement A). Dessinez les axes t' et x' de ce référentiel \mathcal{R}' sur votre dessin, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel \mathcal{R}' , $t'_B < t'_A$.

Écrivons la transformation de Lorentz des coordonnées $(c\Delta t, \Delta \mathbf{r})$ du quadrivecteur \widetilde{AB} . En particulier, la coordonnée temporelle dans le référentiel \mathcal{R}' s'écrit :

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma(v) \Delta t \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)$$

Si $uv/c^2 < 1$, $\Delta t'$ est du même signe que Δt ; par contre, si $uv/c^2 > 1$, c'est à dire si $v/c > c/u$ (possible car $c/u < 1$), $\Delta t'$ sera du signe opposé de celui Δt . Autrement dit, lorsqu'on se place dans un référentiel galiléen \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse $v > c^2/u$, l'ordre temporel des événements A et B est inversé dans ce référentiel.

Voir la figure 12.

4.7 — Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité? Proposez une interprétation de la succession des événements A et B dans le référentiel \mathcal{R}' .

En se plaçant dans un référentiel galiléen \mathcal{R}' tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v > c^2/u$ (avec toutefois $v < c$), on observe une inversion de l'ordre des événements A (émission du tachyon) et B (réception du tachyon). C'est à priori incompatible avec le principe de causalité. Un moyen de s'en sortir toutefois, est de décrire cette succession d'événements vus dans \mathcal{R}' comme l'émission d'un anti-tachyon en B, suivi de sa réception en A. Par contre, pour conserver la compatibilité avec le principe de causalité, il est impératif que le tachyon ne transporte aucune information.

4.8 — On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u . Exprimée ainsi, son énergie est imaginaire, mais que pouvez-vous dire du comportement de $|E(u)|$ en fonction de u ? Combien d'énergie faut-il fournir pour faire ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$? Pour un tachyon, comment évolue son énergie (ou plutôt le module de son énergie) lorsqu'il accélère?

L'énergie d'un tachyon de vitesse u s'écrit :

$$E(u) = \gamma(u)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Comme $u > c$, le dénominateur est imaginaire : on peut encore écrire l'énergie sous la forme :

$$E(u) = i \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}}$$

On remarque immédiatement que le module $|E(u)|$ diminue quand la vitesse du tachyon augmente ; réciproquement, $|E(u)|$ croît quand u décroît ; de plus,

$$\lim_{u \rightarrow c} |E(u)| = \lim_{u \rightarrow c} \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = +\infty$$

l'énergie d'un tachyon tend vers l'infini quand sa vitesse tend vers c : il faudrait donc fournir une énergie infinie pour ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$.

4.9 — Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte?

Les propriétés de l'hypothétique tachyon sont particulièrement étranges ; la relativité restreinte prédit en particulier que selon le référentiel, l'ordre des événements le long de la trajectoire d'un tachyon puisse être inversé, ce qui est incompatible avec le principe de causalité. L'existence effective de tachyons est donc un peu douteuse...

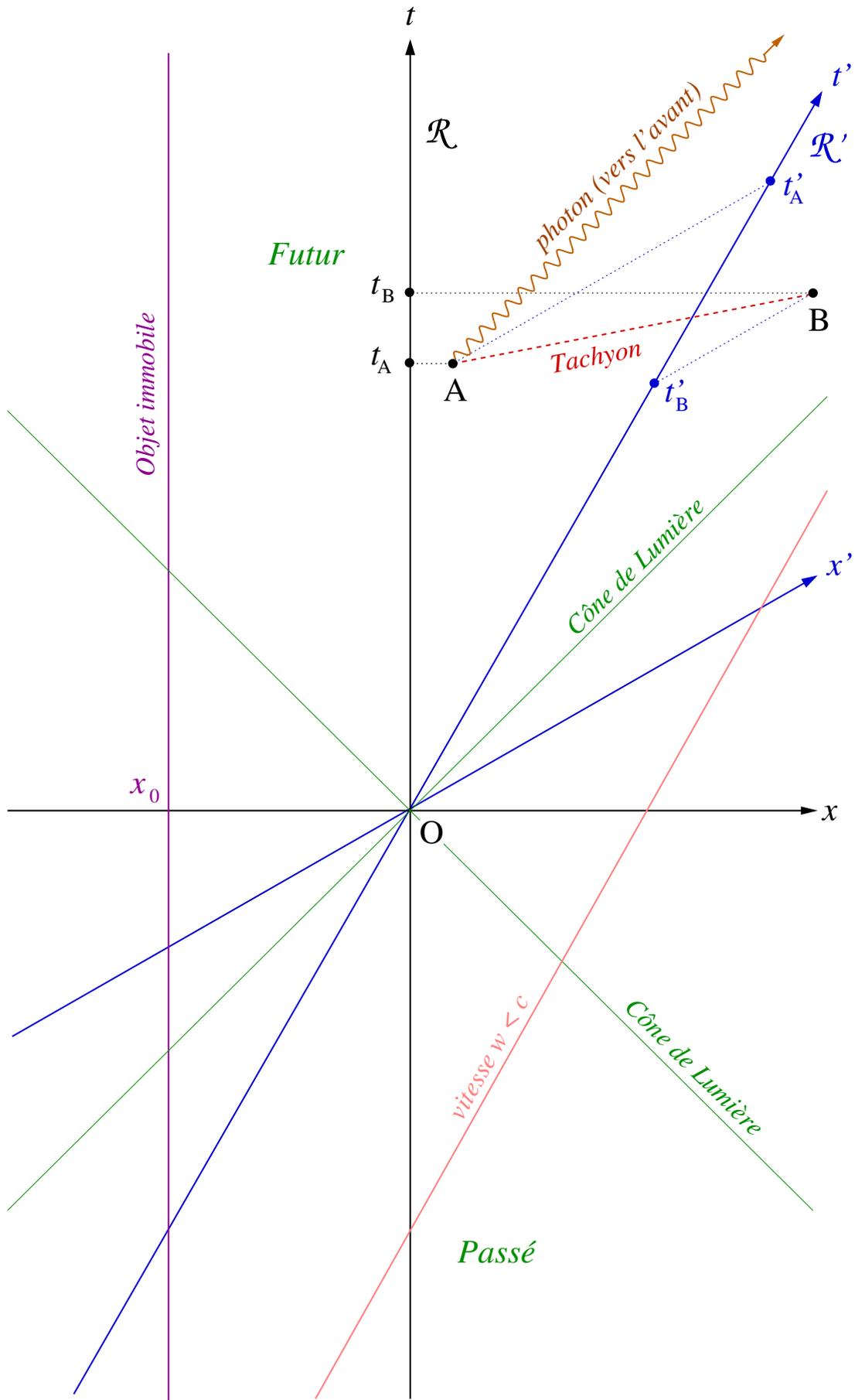


FIGURE 12 – Diagramme d'espace-temps ; trajectoire des tachyons