

Université Pierre et Marie Curie  
École Normale Supérieure de Cachan

PHYTEM

## LP353 – Relativité – Corrigé du TD

Année Universitaire 2017-2018

### 5.2 Champ électromagnétique produit par un fil infini chargé

On considère un fil infini le long de l'axe  $Oz$ , de section  $s$  négligeable devant les dimensions du problème. On se placera toujours à l'extérieur du fil.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, solidaire avec le matériau constituant le fil, le fil porte une charge électrique uniformément répartie : la densité volumique de charge est  $\rho$ , et la densité linéique  $\lambda = \rho s$ . Ces charges électriques sont animées d'un mouvement uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ , créant ainsi dans le fil une densité de courant  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ .

#### Courant et densité de charge

1 — Exprimez le courant électrique  $I$  qui circule dans le fil en fonction de  $\mathbf{j}$  et  $s$ , puis en fonction de  $\rho$ ,  $v$  et  $s$ .

Le courant électrique  $I$  est simplement le flux du vecteur densité de courant à travers la section du fil :

$$I = \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z dS = j s = \rho v s$$

On se place maintenant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v}$ , tel que  $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ .

2 — Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , que vaut le courant électrique  $I'$  dans le fil ? La densité de courant  $\mathbf{j}'$  ?

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , les charges sont immobiles : la densité de courant  $\mathbf{j}'$  et le courant  $I'$  sont donc nuls.

3 — Écrivez la transformation de Lorentz entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . **Attention ! Le mouvement relatif n'est pas selon  $Ox$  mais selon  $Oz$  !**

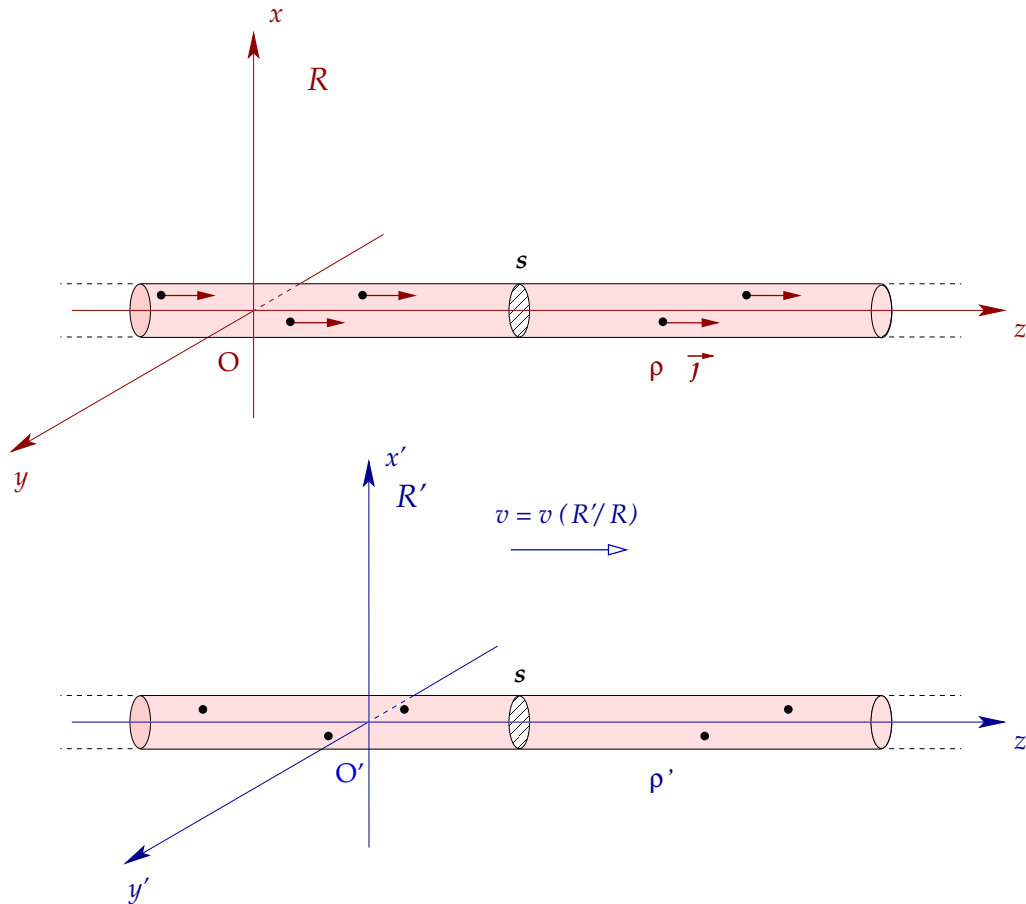


FIGURE 1 – Fil infini chargé, parcouru par un courant. Points de vue : dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du fil (haut) ; dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement avec les charges (bas).

Avec les conventions choisies, la transformation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{array} \right.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

4 — Montrez que pour un quadrivecteur quelconque  $\tilde{\mathbf{A}}$  de composantes contravariantes  $A^\nu$ , la matrice  $[\mathbf{L}]$  qui permet d'exprimer les composantes  $A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu$  dans  $\mathcal{R}'$  en fonction des composantes

$A^\nu$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_{\nu} [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} A^\nu = [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donnez la matrice inverse  $\mathbf{L}^{-1}$  telle que  $A^\mu = [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\nu} A'^\nu$ . Comment se transforment les composantes covariantes  $A_\nu$  lorsqu'on passe du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

**Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé : le mouvement relatif est selon  $e_z$ .**

Pour un quadrivecteur quelconque  $\tilde{\mathbf{A}}$  de composantes contravariantes  $A^\nu$  dans  $\mathcal{R}$ , ses composantes  $A'^\mu$  dans  $\mathcal{R}'$  s'obtiennent par la relation :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_{\nu} [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} A^\nu = [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Et réciproquement,

$$\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R} \quad A^\mu = \sum_{\nu} [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\nu} A'^\nu = [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\nu} A'^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

5 — Que vaut l'abscisse  $z'$  du point origine  $O'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ? Exprimez  $z'(O')$  en fonction de sa position  $z(O')$  dans  $\mathcal{R}$  et du temps  $t$ .

On a immédiatement  $z'(O') = 0$ . En utilisant la transformation de Lorentz, on peut aussi écrire :

$$z'(O') = 0 = \gamma (z(O') - \beta ct) \quad (1)$$

6 — Considérons un point  $A'$  fixe dans  $\mathcal{R}'$ , placé sur l'axe  $O'z'$  à une distance  $z'(A') = \ell'$  de l'origine  $O'$ . Exprimez  $z'(A')$  dans  $\mathcal{R}'$  en fonction de sa position  $z(A')$  dans  $\mathcal{R}$  et du temps  $t$ .

Comme précédemment, en appliquant la transformation de Lorentz, on obtient,

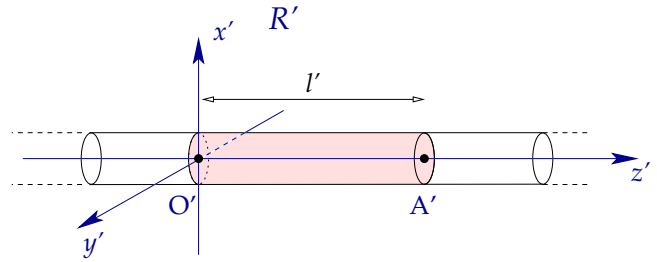
$$z'(A') = \ell' = \gamma (z(A') - \beta ct) \quad (2)$$

7 — En vous souvenant que la longueur d'un objet se mesure dans un référentiel donné en repérant la position de ses extrémités *au même instant* dans ce référentiel, déduisez-en la relation entre  $\ell = z(A') - z(O')$  et  $\ell' = z'(A') - z'(O')$ .

En combinant les équations (1) et (2), et en se souvenant de la définition d'une distance dans  $\mathcal{R}$  (différence des positions prises au même temps  $t$ ), on trouve immédiatement :

$$\ell' = z'(A') - z'(O') = \gamma (z(A') - \beta ct) - \gamma (z(O') - \beta ct) = \gamma (z(A') - z(O')) = \gamma \ell \quad \text{i.e.} \quad \ell = \frac{\ell'}{\gamma}$$

8 — Considérons le volume cylindrique du fil délimité par les points  $O'$  et  $A'$  (figure ci-contre). Quel est son volume  $V$  (respectivement  $V'$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ) ? En utilisant le fait que la charge électrique totale  $Q$  contenue dans ce cylindre est la même dans les deux référentiels, déduisez-en la relation qui relie la densité de charge électrique  $\rho$  vue dans  $\mathcal{R}$  et  $\rho'$  vue dans  $\mathcal{R}'$ .



Le volume délimité par les points  $O'$  et  $A'$  vaut :

$$V = sl \quad (\text{dans } \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad V' = sl' = \gamma sl \quad (\text{dans } \mathcal{R}')$$

On en déduit l'expression de la charge électrique  $Q$  contenu dans ce volume :

$$Q = \rho V = \rho sl \quad (\text{dans } \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad Q = \rho' V' = \gamma \rho' sl \quad (\text{dans } \mathcal{R}')$$

D'où,

$$Q = \rho sl = \gamma \rho' sl \quad \text{i.e.} \quad \rho = \gamma \rho' \quad \rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

9 — Retrouvez la relation entre  $\rho$  et  $\rho'$  en écrivant le quadrivecteur-courant  $\tilde{\mathbf{j}} : j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$  dans les deux référentiels et en exploitant l'invariance de  $\tilde{\mathbf{j}}^2 = j^\mu j_\mu$ .

Dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , le quadrivecteur courant s'écrit respectivement :

$$\tilde{\mathbf{j}} : j^\mu = (\rho c, \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}) \quad (\mathcal{R}) \quad \tilde{\mathbf{j}}' : j'^\mu = (\rho' c, \mathbf{0}) \quad (\mathcal{R}')$$

L'invariance de la pseudo-norme carrée de  $\tilde{\mathbf{j}}$  permet d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{j}}^2 = \tilde{\mathbf{j}}'^2 \quad \text{soit} \quad \rho^2 c^2 - \rho^2 v^2 = \rho'^2 c^2 \quad \text{i.e.} \quad \rho^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho'^2 \quad \text{d'où} \quad \rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

### Champ électrique

Plaçons-nous dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  : dans  $\mathcal{R}'$  les charges sont immobiles, et nous sommes en présence d'un problème classique d'électrostatique.

Soit un point  $M$  quelconque dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , situé à une distance  $b$  de l'axe  $z'$  du fil infini.

10 — On repère le point  $M$  par ses coordonnées polaires  $b', \theta', z'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , et  $b, \theta, z$  dans  $\mathcal{R}$  (figure 2). Exprimez  $b$  et  $\theta$  en fonction de  $b'$  et  $\theta'$ .

La coordonnée  $b$  est orthogonale au mouvement relatif des deux référentiels galiléens : on a donc  $b = b'$ . De même, l'angle  $\theta$  est défini dans le plan transverse  $(Oxy)$  par  $\tan \theta = y/x$  ; comme les coordonnées  $x$  et  $y$  ne sont pas affectées par la transformation de Lorentz,  $\theta$  ne l'est pas non plus, et  $\theta = \theta'$ .

11 — En utilisant des arguments de symétrie, montrez que le champ électrique  $\mathbf{E}'(M)$  est nécessairement radial, et qu'il n'est fonction que de  $b$  :  $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$ .

Comme le fil est infini et que la densité de charge est uniforme, le système est invariant par translation selon  $O'z'$  :  $E'(M)$  est donc indépendant de la coordonnée  $z'$ . D'autre part, le système est invariant par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe  $O'z'$  : l'intensité du champ  $E'$  ne doit donc pas dépendre de l'angle  $\theta$ .

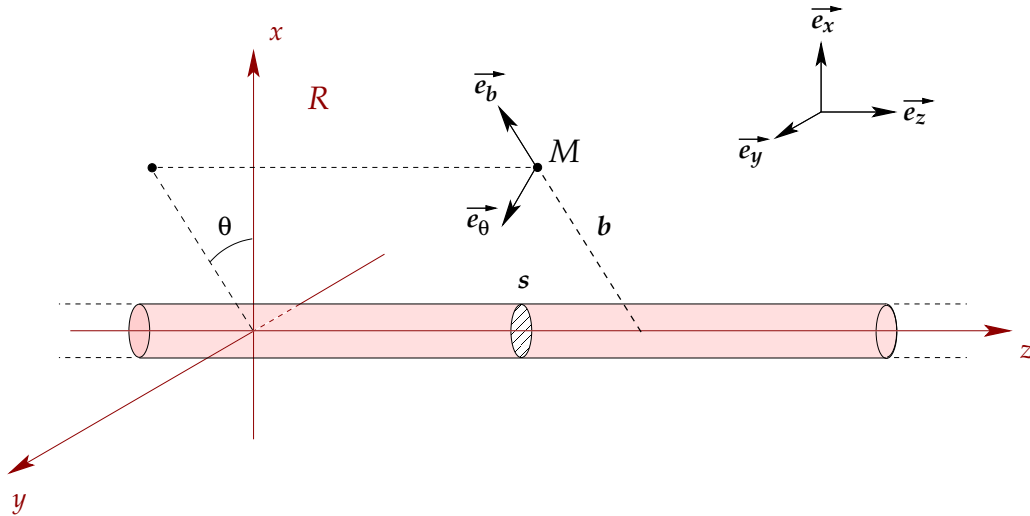


FIGURE 2 – Choix des coordonnées : on notera  $b$  la distance d'un point quelconque  $M$  au fil.

Considérons le plan de symétrie  $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$ . Cette symétrie laisse invariante la géométrie du système et la distribution des charges. Par conséquent, la composante  $E'_z$  de  $\mathbf{E}'$  orthogonale à ce plan est nécessairement nulle.

Il en est de même pour le plan de symétrie défini par le point  $M$  et l'axe  $O'z'$  : On en déduit que la composante orthoradiale  $E'_\theta$  est elle aussi nulle.

On en conclut que la seule composante non nulle du champ  $\mathbf{E}'(M)$  est la composante radiale  $E'_b$ , et que l'intensité du champ  $\mathbf{E}'$  ne dépend que de la distance au fil  $b$  :  $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$ .

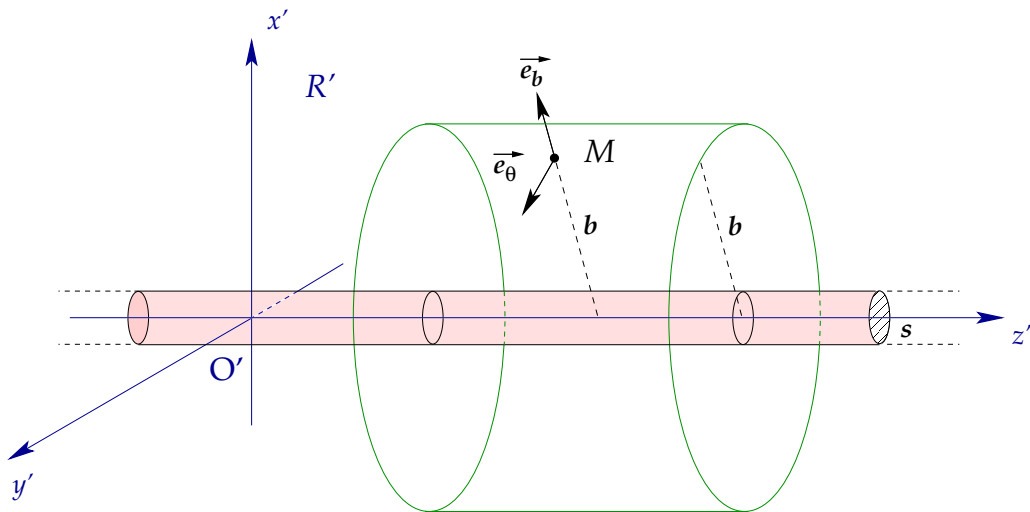


FIGURE 3 – Volume cylindrique  $\mathcal{V}'$  de rayon  $b$  pour le calcul du champ électrique par le théorème de Gauss.

12 — En appliquant le théorème de Gauss pour un volume cylindrique bien choisi (voir fig. 3), montrez que l'expression de l'intensité du champ électrique  $E'(b)$  à l'extérieur du fil est :

$$\mathbf{E}'(b) = E'(b) \mathbf{e}_b = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre  $\mathcal{V}'$  de rayon  $b$ , d'axe de révolution  $O'z'$ , et de longueur  $L'$ , défini entre les abscisses  $z'(M) - L'/2$  et  $z'(M) + L'/2$ . Le flux du champ  $\mathbf{E}'$  à travers la surface de ce cylindre est égal à la charge électrique totale  $Q_{\mathcal{V}'}$  contenue dans le cylindre divisé par la permittivité du vide  $\epsilon_0$  :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}'} \frac{\rho'}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\mathcal{V}'}}{\epsilon_0}$$

Comme  $\mathbf{E}'$  est radial et que son intensité ne dépend que de  $b$ , constant sur la périphérie du cylindre, cette équation se simplifie :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = 2\pi b L' E'(b) = \frac{\rho' s L'}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$E'(b) = \frac{\rho' s L'}{2\pi\epsilon_0 b L'} = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \quad \mathbf{E}'(b) = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On rappelle la forme générale du tenseur du champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

13 — Donnez explicitement l'expression du tenseur  $\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  pour un point quelconque M situé à l'extérieur du fil chargé.

Dans  $\mathcal{R}'$ , en l'absence de courant et donc de champ magnétique, d'après ce qui précède, le tenseur  $\tilde{\mathbf{F}}'$  a pour composantes contravariantes :

$$\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c = -\frac{E'(b)}{c} \cos\theta & -E'_y/c = -\frac{E'(b)}{c} \sin\theta & 0 \\ E'_x/c = \frac{E'(b)}{c} \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ E'_y/c = \frac{E'(b)}{c} \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14 — Rappelez comment se transforme un tenseur contravariant de rang 2 par changement de référentiel galiléen. **Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé.**

Lorsqu'on passe du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ , Les composantes contravariantes  $F^{\mu\nu}$  du tenseur électromagnétique se transforment selon :

$$F'^{\mu\nu} = [\mathbf{L}]^\mu_\alpha [\mathbf{L}]^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

et réciproquement,

$$F^{\mu\nu} = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu_\alpha [\mathbf{L}^{-1}]^\nu_\beta F'^{\alpha\beta}$$

15 — En utilisant le résultat précédent, déduisez-en l'expression du tenseur électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Identifiez avec l'expression générale du tenseur  $F^{\mu\nu}$ , et donnez l'expression des composantes  $(E_x, E_y, E_z)$  et  $(B_x, B_y, B_z)$  des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

En utilisant ce qui précède, et le fait que les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}^{-1}$  sont symétriques, on trouve :

$$F^{\mu\nu} = [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\alpha} [\mathbf{L}^{-1}]^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta} = [\mathbf{L}^{-1}]^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha\beta} [\mathbf{L}^{-1}]^{\nu}_{\beta}$$

expression qui peut s'interpréter comme un produit matriciel (car la matrice de Lorentz est symétrique),

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \\ \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Ce qui donne,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \\ \gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & 0 & 0 & \beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta \\ \gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 & 0 & \beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta \\ 0 & -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En identifiant, on trouve,

$$E_x = \gamma E'(b) \cos \theta \quad E_y = \gamma E'(b) \sin \theta \quad E_z = 0$$

où

$$E'(b) = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b}$$

Or, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,

$$E_x = E(b) \cos \theta \quad E_y = E(b) \sin \theta \quad E_z = 0$$

D'où, en identifiant,

$$E(b) = \gamma \times E'(b) = \gamma \times \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} = \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b}$$

Par ailleurs, on trouve un champ magnétique non-nul dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de composantes :

$$B_x = -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta = -B(b) \sin \theta \quad B_y = +\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta = +B(b) \cos \theta \quad B_z = 0$$

où, en identifiant, on obtient la norme du champ magnétique  $B(b)$  :

$$B(b) = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} \times \gamma \frac{v}{c^2} = \frac{\rho v s}{2\pi b \epsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{et par conséquent} \quad \mathbf{B}(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \mathbf{e}_\theta$$

**16** — En vous plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et en utilisant de nouveau le théorème de Gauss, retrouvez l'expression du champ  $\mathbf{E}(M)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Commentez.

En raisonnant comme précédemment, on peut définir dans le référentiel  $\mathcal{R}$  un volume cylindrique  $\mathcal{V}$  de rayon  $b$  et de longueur  $L$  dans  $\mathcal{R}$ , défini entre les abscisses  $z(M) - L/2$  et  $z(M) + L/2$ . Le flux du champ  $\mathbf{E}$  à travers la surface de ce cylindre est égal à la charge électrique totale  $Q_{\mathcal{V}}$  contenue dans le cylindre divisé par la permittivité du vide  $\varepsilon_0$  :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\varepsilon_0}$$

Comme  $\mathbf{E}$  est radial (même raisonnement, la géométrie est identique) et que son intensité ne dépend que de  $b$ , constant sur la périphérie du cylindre, cette équation se simplifie :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi b L E(b) = \frac{\rho s L}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$E(b) = \frac{\rho s L}{2\pi\varepsilon_0 b L} = \frac{\rho s}{2\pi\varepsilon_0 b} \quad \mathbf{E}(b) = \frac{\rho s}{2\pi\varepsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On retrouve naturellement le résultat obtenu en transformant les composantes du tenseur électromagnétique.

## Champ magnétique

On considère maintenant le système dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le fil est parcouru par un courant  $I$ .

17 — Montrez que, par symétrie, l'intensité du champ magnétique  $B$  en un point  $M$  quelconque (à l'extérieur du fil) n'est fonction que de  $b$ , et que  $\mathbf{B}$  est nécessairement orthoradial :  $\mathbf{B} = B(b) \mathbf{e}_\theta$ .

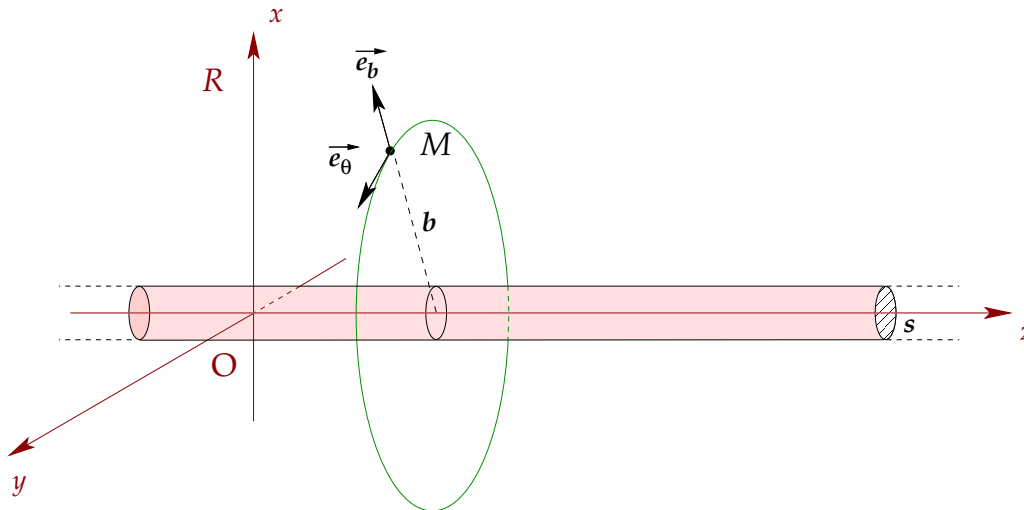


FIGURE 4 – Contour circulaire  $\partial\mathcal{D}$  du disque  $\mathcal{D}$  de rayon  $b$  pour le calcul du champ magnétique au point  $M$  par le théorème d'Ampère.

Comme le fil est infini et que la densité de courant est uniforme, le système est invariant par translation selon  $Oz$  :  $B(M)$  est donc indépendant de la coordonnée  $z$ . D'autre part, le système est invariant par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe  $Oz$  : l'intensité du champ  $B$  ne doit donc pas dépendre de l'angle  $\theta$ . L'intensité du champ magnétique ne dépend donc que de la distance au fil  $b$ .

Considérons le plan d'anti-symétrie  $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$ . Cette symétrie laisse invariante la géométrie du système et inverse la densité de courant :  $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$ . Or, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est un tenseur



anti-symétrique de rang 2, sa composante orthogonale au plan d'anti-symétrie est donc nulle, et il est contenu dans ce plan. Le champ  $\mathbf{B}$  est donc orthoradial, *i.e.* selon  $\mathbf{e}_\theta$ . On a donc :  $\mathbf{B}(M) = B(b) \mathbf{e}_\theta$ .

**18** — En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour astucieusement choisi (fig 4), montrez que le champ magnétique vaut :

$$\mathbf{B}(b) = B(b) \mathbf{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B(b) = \frac{\mu_0 j s}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

Calculons la circulation du champ  $\mathbf{B}$  sur un contour circulaire  $\partial\mathcal{D}$  défini dans un plan  $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$  et centré sur le fil. Tout le long du contour, l'intensité du champ magnétique est constante car elle ne dépend que de  $b$ . On a donc :

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta \, dl = 2\pi b B(b)$$

Cette circulation est égale au flux du rotationnel du champ  $\mathbf{B}$  à travers le contour  $\mathcal{D}$ ,

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta \, dl = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

D'où on déduit :

$$2\pi b B(b) = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad B(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \mathbf{e}_\theta$$

**19** — Montrez que ce résultat est cohérent avec les composantes  $(B_x, B_y, B_z)$  que vous avez obtenues précédemment par transformation du tenseur  $F^{\mu\nu}$ .

Commentez : en quoi le champ magnétique est-il un effet purement relativiste ?

On retrouve la même expression pour le champ magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Le champ magnétique semble dépendre de l'observateur et du référentiel d'étude du système : dans un référentiel où les charges sont en mouvement,  $B$  est non-nul ; dans le référentiel qui se déplace avec les charges, le champ  $B$  s'annule. On peut ainsi interpréter  $B$  comme une manifestation relativiste lié au choix du référentiel d'observation du système.

### 5.3 Lagrangien du champ électromagnétique

Les équations du champ électromagnétique peuvent s'écrire sous la forme d'un lagrangien  $\mathcal{L}$  (en fait plutôt une densité lagrangienne, scalaire défini en tout point de l'espace) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

À partir des équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0$$

retrouvez les équations de Maxwell sous forme relativiste ("relations aux sources").

Le tenseur du champ électromagnétique est donné par les composantes covariantes

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Dans l'expression du Lagrangien,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu,$$

la quantité scalaire  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  et les composantes  $j^\mu$  ne dépendent pas des composantes du quadricteur potentiel. On a donc

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial A_\nu} = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial(-A_\mu j^\mu)}{\partial A_\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} j^\mu.$$

On peut remarquer que  $\partial A_\mu / \partial A_\nu$  ne peut prendre que deux valeurs : 0 lorsque  $\mu \neq \nu$  et 1 lorsque  $\mu = \nu$ . On obtient donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\delta_\mu^\nu j^\mu = -j^\nu.$$

Il faut maintenant exprimer la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Dans l'expression du Lagrangien, le terme scalaire  $A_\mu j^\mu$  ne dépend pas de la quantité (tensorielle)  $\partial_\mu A_\nu$ . Le calcul se résume donc à évaluer la quantité

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)},$$

où nous avons remplacé les indices  $\mu$  et  $\nu$  par  $\alpha$  et  $\beta$  pour exprimer les composantes du tenseur électromagnétique. Conserver les indices  $\mu$  et  $\nu$  donnerait une expression incohérente (sommation implicite).

Comme au dénominateur les composantes sont covariantes, on utilise les composantes covariantes du tenseur électromagnétique :

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Dans le membre de droite, on constate à nouveau que l'on peut utiliser le symbole de Kronecker pour simplifier l'expression. En effet,

$$\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ si } \alpha = \mu \text{ et } \beta = \nu \\ = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{array} \right\} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu.$$

On a donc

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu$$

et

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu.$$

Donc,

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} \left[ (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F_{\rho\sigma} + (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) F_{\alpha\beta} \right].$$

On peut remarquer que les symboles de Kronecker vont avoir pour effet de “sélectionner” certaines composantes du tenseur métrique. Par exemple,

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}.$$

On a donc

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = (\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})F_{\rho\sigma} + (\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})F_{\alpha\beta} = F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}.$$

Comme le tenseur  $F$  est antisymétrique, on a

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = 4F^{\mu\nu}.$$

Finalement,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\right) = -j^{\nu} + \frac{1}{\mu_0}\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0,$$

et

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}.$$

On retrouve bien l'équation de Maxwell correspondant à la relation entre les champs et les sources. L'autre équation, qui décrit la structure du champ, découle directement de la définition du tenseur électromagnétique.

## 5.4 Effet Doppler

En utilisant le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, retrouvez la loi de l'effet Doppler relativiste.

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \hbar\tilde{\mathbf{k}} \quad p^{\mu} = (E/c, \mathbf{p}) \left( \frac{h\nu}{c}, \hbar\mathbf{k} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{p}}^2 = p_{\mu}p^{\mu} = 0$$

Ecrivons ses composantes  $p'^{\mu}$  dans un autre référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  dans la direction de propagation du photon :  $\mathbf{v} = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\mathbf{e}_x$  ( $v$  algébrique) et  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ . En utilisant la transformation de Lorentz, on obtient :

$$p'^{\mu} = [\mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} p^{\nu} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \frac{h\nu'}{c} \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{h\nu'}{c} &= \gamma \frac{h\nu}{c} - \beta\gamma\hbar k \\ k'_x &= k' = -\beta\gamma \frac{h\nu}{c} + \gamma\hbar k \\ k'_y &= 0 \\ k'_z &= 0 \end{aligned}$$

D'où on déduit :

$$v' = v \times \gamma(1 - \beta) = v \times \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

On retrouve l'équation de l'effet Doppler relativiste obtenue à l'exercice 1.6.

## 5.5 Distribution angulaire de la lumière émise (effet phare)

Une source de lumière  $O'$  émet des photons de manière isotrope dans son référentiel  $R'$ . Cette source lumineuse est animée d'une vitesse  $c/2$  par rapport au référentiel  $R$ . Étudiez la distribution angulaire des photons dans  $R$  autour de la direction  $Ox$  (direction du mouvement relatif).

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, les composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  du photon émis selon la direction  $(\theta', \phi')$  sont :

$$u'_x = c \cos \theta' \quad u'_y = c \sin \theta' \cos \phi' \quad u'_z = c \sin \theta' \sin \phi'$$

où  $\phi'$  est l'angle azimutal autour de l'axe  $Ox' = Ox$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ , les composantes de la vitesse deviennent :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c \cos \theta' + v}{1 + \frac{vc \cos \theta'}{c^2}} \\ u_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c \sin \theta' \cos \phi'}{1 + \frac{v \cos \theta'}{c}} \\ u_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c \sin \theta' \sin \phi'}{1 + \frac{v \cos \theta'}{c}} \end{aligned}$$

De manière immédiate,  $u_z/u_y = u'_z/u'_y$  et par conséquent  $\phi = \phi'$  : la direction azimutale autour de  $Ox$  est inchangée.

Pour l'angle zénithal  $\theta$ , on a  $u_x = c \cos \theta$ , et par conséquent,

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} > \cos \theta' \quad \text{et par conséquent} \quad \theta < \theta'$$

En particulier, si  $\beta = 1/2$ ,

$$\cos \theta = \frac{1 + 2 \cos \theta'}{2 + \cos \theta'} > \cos \theta'$$

Par exemple, pour  $\theta' = \pi/2$ ,  $\theta = \pi/3$  : l'ensemble des photons émis dans le demi-espace avant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source est émis dans un cône de  $120^\circ$  vers l'avant dans  $\mathcal{R}$ .

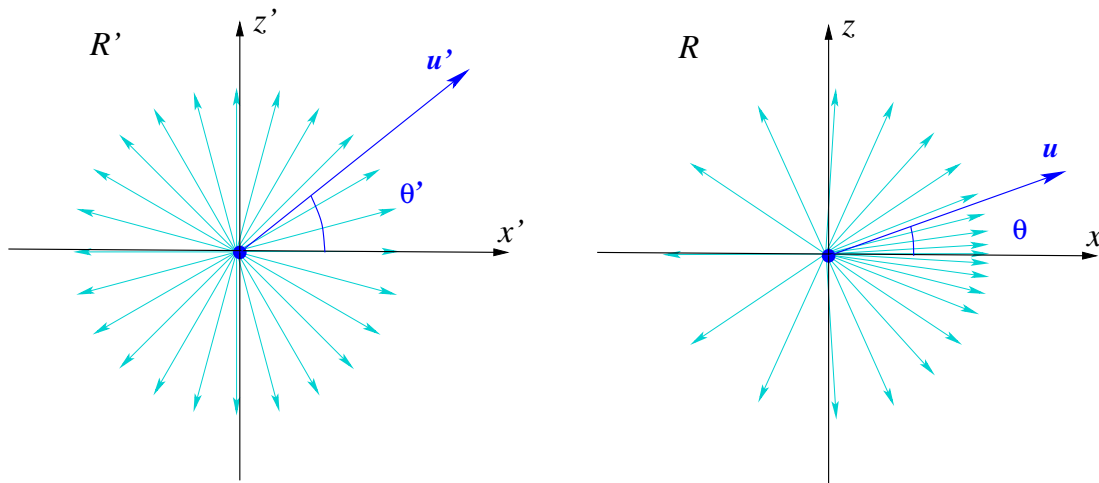


FIGURE 5 – Effet “phare”. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, les photons sont émis selon une distribution angulaire isotrope. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les rayons sont concentrés vers l’avant (effet projecteur ou effet phare) et le flux de photons émis par la source en mouvement est plus intense vers l’avant que vers l’arrière.

## 5.6 Aberration de la lumière

L’aberration des étoiles est un phénomène découvert par l’astronome James Bradley en 1725 : lorsqu’on observe une étoile au cours de l’année, celle-ci semble décrire une ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l’étoile. L’angle d’où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l’observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement.



1) Considérons un observateur lié au soleil qui voit une étoile lointaine dans la direction du pôle de l’écliptique (axe  $Oz$  de l’orbite terrestre). On appelle  $v$  la vitesse d’un astronome situé sur terre observant la même étoile. Calculez l’angle apparent  $\theta'$  que fait la direction de l’étoile avec le pôle de l’écliptique pour l’astronome. Faites l’application numérique ( $v \simeq 30 \text{ km.s}^{-1}$ ).

2) Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle  $\theta$  par rapport au pôle de l’écliptique. Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de  $\theta$ .

Traisons directement le cas général d’un rayon lumineux incliné d’un angle  $\theta$  par rapport à la direction  $Oz$ , axe de l’écliptique, dans le référentiel ( $R$ ) du Soleil (supposé galiléen).

Considérons le cas simple d'un observateur en mouvement à la vitesse  $v$  parallèle à  $Ox$ . Dans le référentiel ( $R$ ), les composantes de  $\mathbf{u}$  sont :

$$u_x = c \sin \theta \quad u_y = 0 \quad u_z = -c \cos \theta$$

Dans le référentiel ( $R'$ ) la composition des vitesses donne :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{c \sin \theta - v}{1 - \frac{vc \sin \theta}{c^2}} \quad u'_y = 0 \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{-c \cos \theta}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vc \sin \theta}{c^2}\right)}$$

On en déduit l'angle apparent  $\theta'$  (ou plutôt sa tangente) sous lequel l'étoile apparaît dans le référentiel ( $R'$ ) :

$$\tan \theta' = -\frac{u'_x}{u'_z} = \gamma(v) \frac{\sin \theta - v/c}{\cos \theta}$$

Dans le cas particulier où  $\theta = 0$  (étoile au zénith écliptique),

$$\theta' \simeq \tan \theta' = -\gamma(v) \frac{v}{c}$$

Pour une vitesse relative de 30 km/s (Terre), on trouve  $\theta' \simeq 10^{-4} \simeq 20$  arcsec pour une étoile au pôle de l'écliptique. Au cours d'une année, une étoile au pôle écliptique décrira un cercle apparent de 20 arcsec de rayon. Pour une étoile plus proche de l'écliptique, l'effet sera plus faible selon la direction  $Oz$  mais de même amplitude dans la direction orthogonale (faites un dessin pour vous en convaincre), et décrira donc des ellipses, d'autant plus aplaties que l'étoile est proche de l'écliptique. Pour une étoile située sur l'écliptique, On aura (avec  $v$  selon  $Ox$ ) :

$$\theta = \pi/2 \quad u'_x = c \quad u'_y = 0 \quad u'_z = 0$$

L'effet selon  $Oz$  sera nul, et l'étoile oscillera au cours de l'année sur un segment de droite de 40 arcsec de longueur, parallèle à l'écliptique.



FIGURE 6 – Secteur zénithal (téléscope pointant au zénith, permettant la mesure de la distance zénithale des étoiles). Conçu pour James Bradley, il est installé à l'observatoire de Greenwich. C'est avec cet instrument que J. Bradley découvrit l'aberration de la lumière (1725) et la nutation de l'axe terrestre (photos LLG).