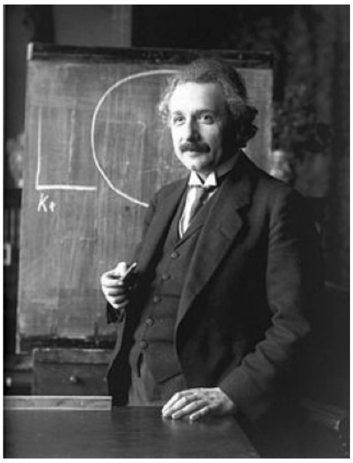
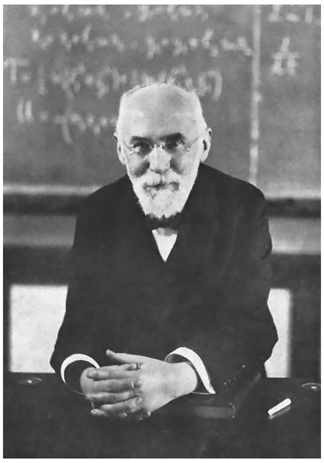
Université Pierre et Marie Curie

École Normale Supérieure de Cachan

Parcours PHYTEM

LP353 – Relativité Restreinte

Exercices

Année Universitaire 2017–2018

Intervenants : L. Le Guillou, J. Bolmont

TD N°1

La transformation de Galilée — L'expérience de Michelson et Morley — Les postulats d'Einstein — Les équations de Lorentz — Contraction des longueurs, dilatation du temps — Les diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel.

1. Mécanique "classique" : transformation de Galilée

Un navire manœuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante $v = 3$ m/s parallèlement au quai.

1. — Sur le quai, un enfant court à la vitesse $u = 2\,\mathrm{m/s}$ par rapport au référentiel du quai, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire ?

2. — Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ($h = 10\,\mathrm{m}$). Décrivez sa trajectoire pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage. Où tombe-t-il ? Ecrivez et résolvez les équations du mouvement dans le référentiel du quai et dans celui du bateau (on pourra utiliser la transformation de Galilée).

3. — L'enfant s'arrête sur le quai, puis lance son ballon à la verticale au dessus de lui à la vitesse w ($w = 10\,\mathrm{m/s}$), puis le rattrape. Ecrivez et résolvez les équations du mouvement dans les deux référentiels.

2. Pêche à la ligne

On traitera ce problème en mécanique classique (relativité galiléenne).

Un pêcheur s'adonne à son loisir favori dans sa barque, au milieu d'une rivière. Ayant fait bonne pêche, il décide de rentrer chez lui, et il remonte le courant à la rame, en ramant à la vitesse constante w par rapport à la rivière.

Passant sous un pont, il perd sans s'en rendre compte son chapeau, qui tombe à l'eau, et est emporté par le courant.

Le pêcheur réalise la perte de son chapeau au bout de 30 minutes. Il décide alors de redescendre la rivière et, en ramant toujours à la même vitesse w par rapport au courant, il parvient à rattraper son chapeau 5 km en aval du pont.

Quelle est la vitesse v du courant (par rapport aux berges) ?

3. L'expérience de Michelson et Morley

Une source lumineuse est placée à une distance L d'un miroir et émet un rayon lumineux dans sa direction. Le rayon est réfléchi et revient vers la source.

1. — Quel est le temps mis par la lumière pour effectuer l'aller-retour entre la source et le miroir ?

La source et le miroir sont maintenant en translation rectiligne et uniforme dans une direction perpendiculaire à l'axe source-miroir et avec une vitesse v.

2. — Représenter graphiquement la situation telle que la voit un observateur immobile. Pour cet observateur, compte-tenu de ce qu'il observe, quel est le temps $T_\perp$ mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour entre la source et le miroir ?

3. — Répondre à la même question dans le cas où le déplacement se fait dans la direction source-miroir, si cette distance vaut L'. On nomme la durée trouvée $T_{//}$.

4. — On suppose pour cette question que $L = L'$. Comparer $T_\perp$ et $T_{//}$. Commenter ce résultat en faisant le lien avec l'expérience de Michelson et Morley.

5. — On suppose maintenant que $L \neq L'$. Quelle devrait être la valeur de L' pour que la condition $T_\perp = T_{//}$ soit vérifiée ?

4. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

1. — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps $\mathrm{d}s^2$:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \qquad (1)$$

5. À la croisée des destinées : lignes d'univers

Leia et Ian Solo ont une vitesse relative constante v. L'axe $\mathbf{e_x}$ des abcisses de Leia est orienté selon la vitesse de Ian, l'axe $\mathbf{e_x}'$ des abcisses de Ian étant opposé à la vitesse de Leia.

1. — Tracez les lignes d'univers, c'est à dire les lignes constituées de l'ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Ian :

(i) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia.

(ii) sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Ian.

Ian et Leia mettent leurs montres à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent : autrement dit, $x = x' = 0$ quand $t = t' = 0$.

2. — Représentez, sur le graphe (x, t), deux événements A et B. Calculer les intervalles de coordonnées Δt, Δx, Δy, Δz entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles $\Delta t'$, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ pour Ian. Calculer $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$.

3. — Représentez, sur le graphe (x, t), deux événements C et D de la vie de Ian. Calculez la valeur de l'intervalle Δt entre C et D pour Leia, en fonction de $\Delta t'$, pour Ian, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas $v = 3c/5$, et $\Delta t' = 1\,\mathrm{s}$.

4. — Ian garde un bras tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe $\mathbf{e_x}'$). Déterminez et représentez la ligne d'univers du bout de l'index de Ian sur le graphe (x, t). Quelle définition peut adopter Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du bras de Ian" ? Calculez cette longueur Δl en fonction de la longueur $\Delta l'$ pour Ian et de sa vitesse. Envisagez le cas $v = 3c/5$, $\Delta l' = 1\,\mathrm{m}$.

5. — Tracez sur le graphe (x, t) :

(i) quelques lignes d'univers du réseau $x' = \mathrm{cte}$ pour Ian.

(ii) quelques lignes du réseau $t' = \mathrm{cte}$ pour Ian.

6. — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes t' et x' de Ian ? Soit un événement E. Représentez, sur le graphe (x, t), ses coordonnées pour Leia et pour Ian respectivement.

7. — Reste à graduer les axes t' et x' sur le graphe (x, t).

(i) Représentez sur le graphe la partie $t > 0$ de l'hyperbole $t^2 - x^2/c^2 = 1\,\mathrm{s}^2$. à quelle valeur de t correspond son intersection avec l'axe t ? A quelle valeur de t' correspond son intersection avec la représentation de l'axe t' ?

(ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole $x^2 - c^2t^2 = 1\,\mathrm{m}^2$ et de ses intersections avec les axes x et x'.

8. — Représentez sur le graphique :

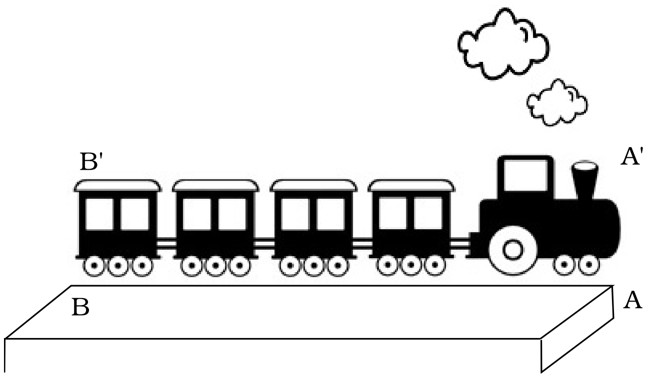
(i) le temps t de l'événement ($t' = 1\,\mathrm{s}$, $x' = 0$) de la vie de Ian.

(ii) la longueur l attribuée au bras de Ian par Leia.

6. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exercice permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps.

On considère un train de longueur L se déplaçant à la vitesse v et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi L et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

(p) La tête du train A' coïncide avec l'arrière du quai B.

(q) La tête du train A' (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai A (où se tient le chef de gare).

(r) La queue du train B' coïncide avec l'arrière du quai B.

(s) La queue du train B' coïncide avec l'avant du quai A.

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare (A) et le conducteur du train (A') synchronisent leurs horloges respectives à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

1. — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements (p), (q), (r) et (s) dans les deux référentiels, R (le quai) et R' (le train).

2. — Quelle est la longueur du train dans son référentiel R' ? vu du quai (référentiel R) ?

3. — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel R' du train ?

4. — Commentez l'ordre des événements (q) et (r) dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai ?

5. — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{qr}$? Quelles sont les conséquences en terme de causalité ?

6. — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

7. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels $\mathcal{R}$ $(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'$ $(O'x'y'z')$. $\mathcal{R}'$ se déplace par rapportà $\mathcal{R}$ à une vitesse $\mathbf{v}$. On note le point P de vecteur position $\mathbf{r}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{r}'$ dans $\mathcal{R}'$.

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant t' et $\mathbf{r}'$ en fonction de t et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$, la vitesse relative du repère (x', y', z') par rapport au repère (x, y, z).

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où $\mathcal{R}'$ se déplace le long de l'axe x de $\mathcal{R}$.

8. Effet Doppler

Leia et Ian ont une vitesse relative v constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine O. Leia choisit son axe x selon la vitesse de Ian qui, lui, choisit son axe x' opposé à la vitesse de Leia. à intervalles réguliers à sa montre Ian émet (événements O, E_1, E_2, E_3, …) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements O, R_1, R_2, R_3, …).

1. — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Ian, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Ian.

2. — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées Δx et Δt entre les deux événements O et E_1 observés par Leia.

3. — Calculez sans transformation de Lorentz, Δt en fonction de v et de l'intervalle $\Delta\tau$ entre les deux émissions O et E_1 à la montre de Ian.

4. — Calculez l'intervalle de temps Δt_R entre deux réceptions O et R_1 de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

TD N°2

Loi de transformation des vitesses — Rapidité — Loi de transformation des accélérations — Mouvement hyperbolique — Paradoxe des jumeaux.

1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules A et B s'éloignent de l'origine choisie O dans des directions opposées avec chacune une vitesse $3c/4$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

1. — Est-il correct de dire que la vitesse relative de A par rapport à B est $3c/2$, c'est à dire supérieure à c ? Quelle est la vitesse de A par rapport à B ? Et réciproquement ?

2. — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

2. Signification opérationnelle de la rapidité

Leia, dans sa fusée en mouvement rectiligne mais non uniforme, a, en un événement (i), une vitesse v par rapport à Ian, inertiel (*i.e.* dépourvu d'accélération), et une vitesse nulle par rapport à Luke, lui aussi inertiel. Un peu plus tard, après un temps $\mathrm{d}t'$ pour Luke, la vitesse de Leia, en l'événement $(i+1)$, est passée à $v + \mathrm{d}v$ pour Ian, et à $\mathrm{d}v'$ pour Luke.

1. — Calculer $\mathrm{d}v'$ en fonction de v et $\mathrm{d}v$.

2. — Quelle est, à ce moment et en fonction de ces grandeurs, la quantité a_i que Leia peut mesurer sur la balance de la salle de bain de la fusée, et qu'elle appelle son accélération (propre) ?

3. — Quel intervalle de temps $\mathrm{d}\tau$ (propre) Leia a-t-elle mesuré, entre les deux événements, à l'aide de son horloge parfaite (c'est-à-dire supposée insensible aux accélérations) ?

4. — Leia additionne la suite des produits $a_i\mathrm{d}\tau/c$ des valeurs des accélérations propres et des intervalles de temps propres qu'elle a mesurées depuis sa séparation d'avec Ian. Exprimez cette somme en en fonction de la vitesse v attribuée par Ian à Leia (sachant qu'avant de quitter Ian sa vitesse était nulle). Interprétez.

3. Mouvement hyperbolique

Dans ce problème, Leia effectue un mouvement uniformément accéléré, surveillée de près par Luke et Ian.

1. — On considère deux événements :
- l'événement E_1 où la vitesse de Leia vaut 0 pour Luke et v pour Ian, tous deux inertiels,
- suivi, après un temps $\mathrm{d}t'$ pour Luke et $\mathrm{d}t$ pour Ian, de l'événement E_2 où la vitesse de Leia vaut $\mathrm{d}v'$ pour Luke et $v + \mathrm{d}v$ pour Ian.

Quelle est l'expression de $\mathrm{d}v'$ en fonction de v et $\mathrm{d}v$?

2. — Quelle est l'expression de l'*accélération propre* a de Leia, en fonction de $\mathrm{d}v'$ et de $\mathrm{d}t'$? Quelle est l'expression de la durée $\mathrm{d}t'$ en fonction de v et de $\mathrm{d}t$? En déduire l'expression de la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de a, v et $\mathrm{d}v$.

3. — Leia, en surveillant bien son poids, pilote sa fusée à accélération propre constante. Sachant qu'elle a quitté Ian en douceur, avec une vitesse $v(0)$ nulle, à l'instant $t = 0$, quelle est l'expression de sa vitesse $v(t)$ à l'instant t pour Ian toujours inertiel ?

4. — En déduire l'expression de la position $x(t)$ de Leia à l'instant t pour Ian.

5. — Quelles sont les expressions approchées de $x(t)$ et de $v(t)$ lorsque t est petit ? lorsque t est grand ? (par rapport à quoi d'ailleurs ?) Représenter sur un graphe d'espace-temps dans le repère (x, t) de Ian : *(i)* la ligne d'univers de Ian, *(ii)* la ligne d'univers de Leia, *(iii)* la ligne d'univers de Luke, inertiel, qui à l'instant t_1 coïncide, en douceur, avec Leia.

6. — Quelle est, en général, la durée $\mathrm{d}\tau$ écoulée pour Leia, entre E_1 et E_2, en fonction de $\mathrm{d}t'$? en fonction de $\mathrm{d}t$ et de v ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante a, que devient cette durée $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}t$, a et t ?

7. — En déduire le temps propre $\tau(t)$ à la montre de Leia, en fonction de a et de t pour Ian. Quelles sont les expressions approchées de $\tau(t)$ pour t petit ? pour t grand ?

8. — Leia se donne l'accélération *"de confort"* $a = g = 9.8\,\mathrm{m.s}^{-2}$. Exprimez a en ly.y^{-2} (année-lumière par année carrée). Calculez $\tau(t)$ après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

4. Le paradoxe des jumeaux

Igor et Grichka dérivent dans l'espace, libres. Grichka décide de quitter Igor en se donnant une accélération propre constante $a = g$ pendant une durée finie $\Delta\tau$. Puis il stoppe les turbopropulseurs à l'arrière de son vaisseau, allume ceux à l'avant qui lui fournissent désormais une accélération $a = -g$, et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée $2\Delta\tau$. Enfin, il arrête les propulseurs à l'avant et rallume les propulseurs arrières, se donnant ainsi une accélération propre $a = g$ pendant $\Delta\tau$ pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Igor est resté au repos.

1. — Représentez toute cette épopée sur un graphe d'espace-temps dans le repère d'Igor.

2. — Calculez le temps $4\Delta\tau$ qui s'est écoulé pour Grichka si toute cette histoire a duré $4\Delta t = 12$ mois pour Igor. Faites de même pour $4\Delta t = 10$ ans et pour $4\Delta t = 40$ ans.

5. Voyage au centre de la galaxie

Le Faucon Millenium se rend en ligne droite de la Terre jusqu'au centre de la galaxie (distance $D \simeq 30.000$ années-lumière) en accélérant (dans le repère propre) à 9.8 m.s^{-2} pendant la moitié du voyage puis en décélerant, à la même valeur, pendant la seconde moitié. L'itinéraire direct passe suffisamment loin de tout corps céleste pour que les effets gravitationnels puissent être négligés.

1. — Représenter l'allure de cette histoire sur un diagramme d'espace-temps dans le repère terrestre.

2. — Quelle est la durée terrestre Δt nécessaire à ce voyage ? Quelle est la durée $\Delta\tau$ de ce voyage pour Ian et ses amis ?

3. — On étudie maintenant les conditions mécaniques de réalisation de ce voyage.

i) Pour cela on se place dans un repère inertiel où, en un événement donné du Faucon, celui-ci a une masse m et une vitesse nulle. Après avoir éjecté une quantité de matière $\mathrm{d}M$ sous une vitesse de module w, le Faucon a une masse $m + dm$ et une vitesse dv'. Quelle relation le principe de conservation de la quadri-impulsion totale permet-il de trouver entre dv', dm, w et m ?

ii) Quelle valeur de l'accroissement dv en déduit-on pour la vitesse v du Faucon, dans le repère inertiel terrestre, en fonction de w, m, dm et c ?

iii) En déduire l'expression du rapport des masses finales et initiales m_F/m_O en fonction des vitesses v_O et v_F du Faucon qui fonctionne à vitesse d'éjection w constante.

4. — Pour le voyage prévu :

i) En déduire la masse finale $m(\Delta\tau)$ au terme du voyage, en fonction de la masse $m(0)$ au départ, de la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ et de la vitesse d'éjection w.

ii) Estimer numériquement la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ en fonction de g, D et c.

iii) En déduire l'expression de $m(\Delta\tau)$.

iv) Quelle est la vitesse d'éjection w optimale ?

v) En supposant cette vitesse techniquement réalisable, quelle masse $m(0)$ le Faucon doit-il avoir au départ pour acheminer $m(\Delta\tau) = 1$ tonne au centre de la galaxie ?

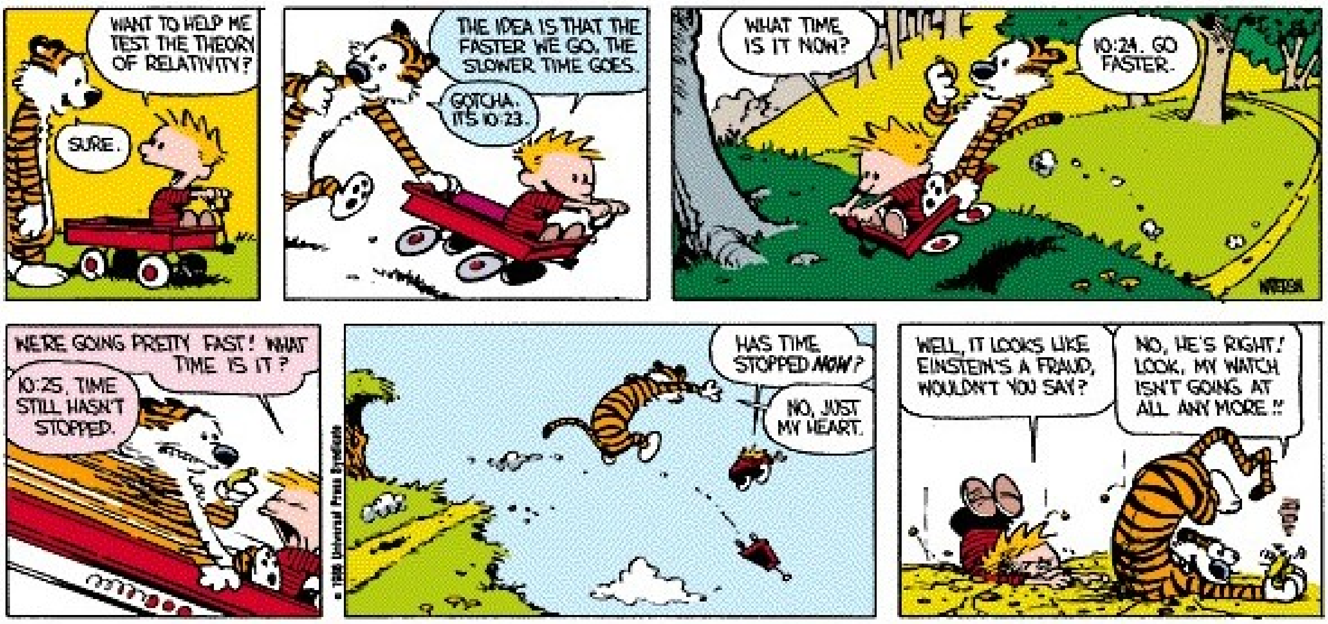


FIGURE 1 – *Calvin & Hobbes*, Bill Waterson.

TD N°3

Formalisme quadrivectoriel — Invariants — Quadrivecteurs position, vitesse, accélération — Quadriforce — Tenseurs — composantes covariantes et contravariantes.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1. — Soit un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = (A^t)^2 - (A^x)^2 - (A^y)^2 - (A^z)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, le produit pseudo-scalaire :

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

est invariant.

2. — Montrez que l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$ est un invariant.

3. — À partir du quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$? Est-ce un invariant ?

2. Vitesse relative

Vus d'un repère R, Luke et Ian se déplacent aux vitesses constantes $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_I$ respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_I$ sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\widetilde{\mathbf{U}}_L$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_I$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/I})$ de Luke par rapport à Ian. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Ian.

3. Quadri-accélération

1. — Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales $\mathbf{A}$ de la quadri-accélération d'une particule $\widetilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement $\mathbf{u}$ et $\dot{\mathbf{u}}$.

2. — En déduire les valeurs A'^0 et $\mathbf{A}'$ des composantes de cette même quadri-accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut $\mathbf{a}$.

3. — En déduire l'expression de $\mathbf{a}^2$ en fonction de $\mathbf{u}$ et de $\dot{\mathbf{u}}$.

4. — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à $\mathbf{u}$?

4. La particule et les observateurs

Dans un repère inertiel $\mathcal{R}$ une particule libre de masse m se déplace à la vitesse $\mathbf{u}$.

1. — Quelles sont les composantes de sa quadri-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$? Exprimez les composantes du quadri-vecteur $\widetilde{\mathbf{p}}$ dans le référentiel de la particule elle-même. Que représente $\widetilde{\mathbf{p}}^2$?

2. — Dans ce repère $\mathcal{R}$, Leia a une vitesse $\mathbf{u}_L$. Quelles sont les composantes de sa quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}_L$?

3. — Dans le repère de Leia $\mathcal{R}_L$:

i) Quelles est la signification des composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$?

ii) Que valent les composantes de $\widetilde{\mathbf{U}}_L$?

iii) En déduire une expression universelle pour l'énergie de la particule dans le repère de Leia $\mathcal{R}_L$.

4. — Soit $\widetilde{\mathbf{U}}_D$ la quadri-vitesse de Dark Vador. Quelle est l'expression de l'énergie de la particule dans le repère $\mathcal{R}_D$ de Dark ?

5. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui subit une quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}/\mathrm{d}\tau$.

1. — Rappeler ce que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$. Déduisez-en $U_\mu \mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}\tau$.

2. — Montrez que le produit $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Quel résultat retrouve-t-on ?

6. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

1. — Soient un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{V}}$ et un tenseur $\widetilde{\mathbf{T}}$ de composantes :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$$

Ecrivez les composantes de

$$T_{\mu\nu} \qquad T^{\mu}{}_{\nu} \qquad T_{\mu}{}^{\nu} \qquad T_{\lambda}{}^{\lambda} \qquad V_\mu V^\mu \qquad V_\mu T^{\mu\nu}$$

2. — Écrivez les composantes contravariantes p^μ du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ d'une particule. Comment obtient-on les composantes covariantes p_μ ? Ecrivez ces composantes explicitement.

3. — On peut écrire l'opérateur gradient sous forme tensorielle :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial r^\mu}$$

Explicitez ∂_μ et ∂^μ.

4. — Explicitez la contraction $\partial_\mu \partial^\mu$. Que reconnaissez-vous ?

TD n°4

Dynamique relativiste — Quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) — Collisions élastiques et inélastiques de particules — Effet Compton.

1. Energie et impulsion

1. — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m, de temps propre τ, de ligne d'univers $\widetilde{\mathbf{x}}(\tau)$.

2. — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m, de vitesse $\mathbf{u}$.

3. — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse $\mathbf{u}$ de la particule de masse m.

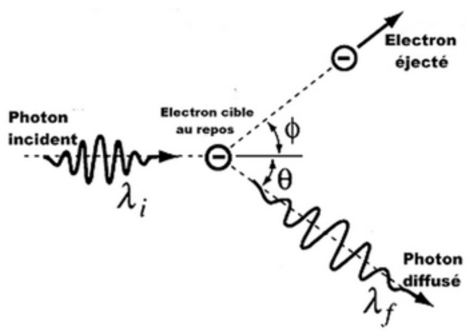
4. — On considère la diffusion élastique proton-proton vue du laboratoire : proton cible immobile, énergie cinétique du proton incident 437 MeV, masse du proton 938 MeV. On s'intéresse au cas où les deux protons de l'état final ont la même énergie. Considérant la conservation de la quadri-impulsion totale, et donc de son carré, calculez l'angle formé par les directions de propagation des protons de l'état final. Et dans le cas d'un proton incident de 1 TeV (produit par le TEVATRON du Fermilab) ?

5. — On considère la collision inélastique, $m + m \to m'$, d'une particule de masse m, de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m, immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

2. L'effet Compton

En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde $\Delta\lambda$ dépend de l'angle de diffusion θ. Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste ; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.

1. — On considère la collision d'un photon d'énergie $h\nu_0$ avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire.



2. — Déduisez-en le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$ du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion θ.

3. — Expérimentalement (A. H. Compton, *Phys. Rev.*, **21** (1923), 483.), A. H. Compton trouve qu'à $90°$ la longueur d'onde de la raie $K\alpha$ ($\lambda_i = 0.0708\,\text{nm}$) du molybdène est mesurée à $\lambda_f = 0.0730\,\text{nm}$. Déduisez-en une estimation de la masse de l'électron.

4. — Montrez qu'un processus où le photon disparaîtrait par absorption par un électron libre est impossible, du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Commentez pour l'effet photoélectrique.

3. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse m_ν, et l'on souhaite calculer l'énergie E_μ du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

4. Collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse m.

Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

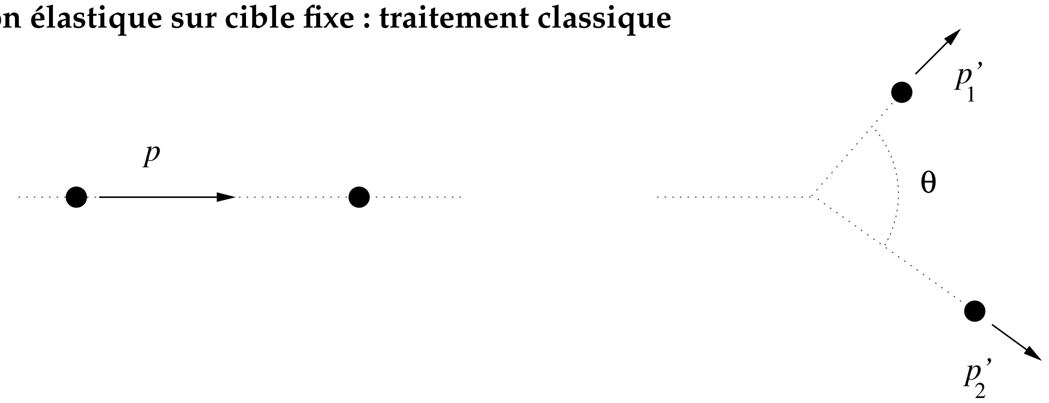


FIGURE 2 – *Collision élastique sur cible fixe.*

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse m, d'impulsion $\mathbf{p}$ et d'énergie cinétique T sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 2).

1. — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

2. — Montrez que l'angle θ entre les impulsions $\mathbf{p_1'}$ et $\mathbf{p_2'}$ des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ dans le cadre classique.

Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

On traite maintenant le même phénomène dans le cadre de la dynamique relativiste.

3. — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

4. — Exprimez l'angle θ entre $\mathbf{p'_1}$ et $\mathbf{p'_2}$ en fonction de E, m, E'_1 et E'_2, où E'_1 et E'_2 sont les énergies des deux particules après la collision.

5. — Dans le cas particulier où $E'_1 = E'_2$, exprimez θ en fonction de E et m ; montrez que θ est nécessairement inférieur à $\pi/2$. Comparez avec le résultat en mécanique classique.

6. — Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ? Écrivez la *masse invariante* $M^* = E^*/c^2$ du système constitué par les deux particules.

Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie E et des impulsions opposées de même norme p (fig. 3).

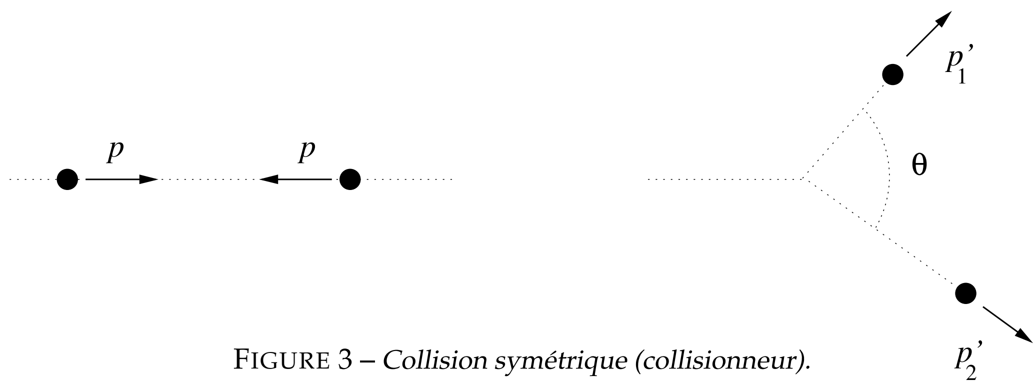


FIGURE 3 – *Collision symétrique (collisionneur).*

7. — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

8. — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système $\mathcal{R}^*$?

9. — Écrivez la masse invariante M^* du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ?

Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons $\bar{p}$ en faisant collisionner des protons p :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

10. — En utilisant la notion de masse invariante, déterminer l'énergie cinétique minimale T_1 qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

11. — En procédant de même, déterminer l'énergie cinétique minimale T_2 qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

12. — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode la plus avantageuse ? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton : $m_p = m_{\bar{p}} = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$.

FIGURE 4 – *Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'antiproton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.*

TD N°5

Tenseur du champ électromagnétique – Invariance de jauge – Force de Lorentz – Equation d'onde – Lagrangien du champ – Optique

1. Equations de Maxwell, invariance de jauge

1. — À partir des équations du champ électromagnétique sous leur forme relativiste,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \qquad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

retrouvez les quatre équations de Maxwell dans le vide.

2. — Rappelez les expressions des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en fonction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

3. — Le potentiel $\widetilde{\mathbf{A}}$: $A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ n'est pas défini de façon univoque. Montrez que pour toute fonction scalaire χ, la transformation suivante :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

laisse $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ inchangés. On parle d'*invariance de jauge*. Montrez que $F^{\mu\nu}$ vérifie l'invariance de jauge.

En fonction du problème traité, on pourra choisir la *jauge* la plus adaptée. On rencontre généralement les deux choix de jauge suivants :

$$\text{Jauge de Coulomb :} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{Jauge de Lorenz :} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

4. — Montrez que la condition de la jauge de Lorenz s'écrit simplement $\partial_\mu A^\mu = 0$.

5. — Écrivez l'équation de propagation du potentiel $\widetilde{\mathbf{A}}$ dans le vide. Montrez que cette équation prend une forme très simple dans la jauge de Lorenz.

6. — Vérifiez que toute fonction de la forme $f(\widetilde{\mathbf{r}}) = C\, e^{i\,\widetilde{\mathbf{k}}\cdot\widetilde{\mathbf{r}}}$ avec $\widetilde{\mathbf{k}}$: $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est solution de l'équation $\Box f = 0$.

7. — Que reconnaissez-vous dans le produit $\varphi = \widetilde{\mathbf{k}} \cdot \widetilde{\mathbf{r}} = k_\mu r^\mu$? Est-ce un invariant de Lorentz ?

2. Champ électromagnétique produit par un fil infini chargé

(Extrait de l'examen de novembre 2015)

On considère un fil infini le long de l'axe Oz, de section s négligeable devant les dimensions du problème. On se placera toujours à l'extérieur du fil.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, solidaire avec le matériau constituant le fil, le fil porte une charge électrique uniformément répartie : la densité volumique de charge est ρ, et la densité linéique $\lambda = \rho\, s$. Ces charges électriques sont animées d'un mouvement uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e_z}$, créant ainsi dans le fil une densité de courant $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$.

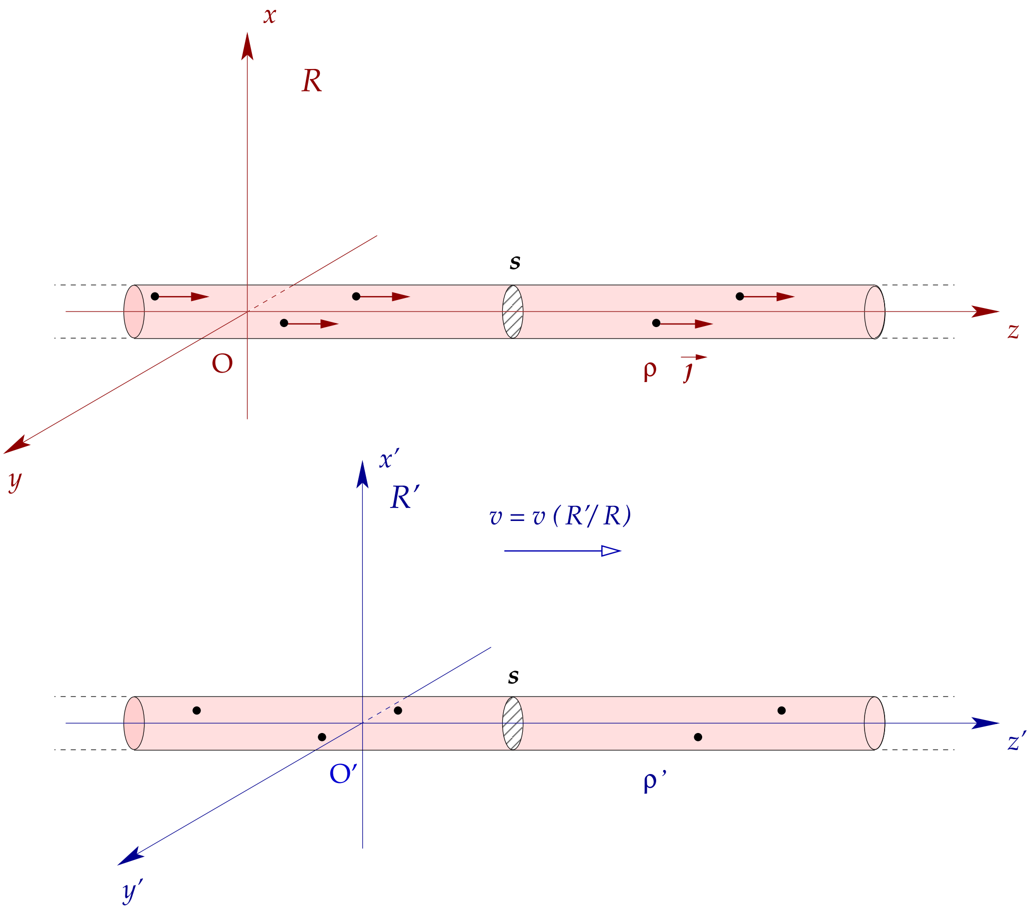


FIGURE 5 – *Fil infini chargé, parcouru par un courant. Points de vue : dans le référentiel $\mathcal{R}$ du fil (haut) ; dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement avec les charges (bas).*

2.1. Courant et densité de charge

1. — Exprimez le courant électrique I qui circule dans le fil en fonction de $\mathbf{j}$ et s, puis en fonction de ρ, v et s.

On se place maintenant dans le référentiel $\mathcal{R}'$, en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v}$, tel que $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v} = v\,\mathbf{e_z}$.

2. — Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, que vaut le courant électrique I' dans le fil ? La densité de courant $\mathbf{j}'$?

3. — Écrivez la transformation de Lorentz entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. ***Attention ! Le mouvement relatif n'est pas selon*** Ox ***mais selon*** Oz ***!***

4. — Montrez que pour un quadrivecteur quelconque $\widetilde{\mathbf{A}}$ de composantes contravariantes A^ν, la matrice $[\mathbf{L}]$ qui permet d'exprimez les composantes $A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu$ dans $\mathcal{R}'$ en fonction des composantes A^ν dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\mathcal{R} \to \mathcal{R}' \qquad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu\, A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu\, A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

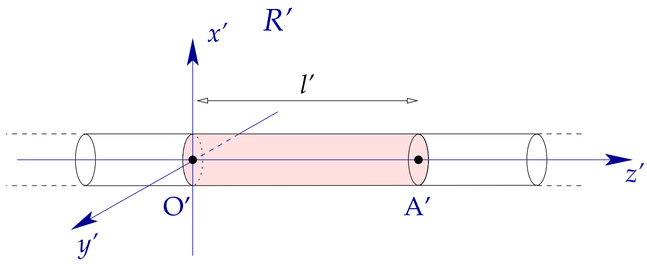
Donnez la matrice inverse $\mathbf{L}^{-1}$ telle que $A^\mu = \left[\mathbf{L}^{-1}\right]^\mu{}_\nu\, A'^\nu$. Comment se transforment les composantes covariantes A_ν lorsqu'on passe du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$?

5. — Que vaut l'abscisse z' du point origine O′ dans le référentiel $\mathcal{R}'$? Exprimez $z'(\mathrm{O}')$ en fonction de sa position $z(\mathrm{O}')$ dans $\mathcal{R}$ et du temps t.

6. — Considérons un point A′ fixe dans $\mathcal{R}'$, placé sur l'axe $O'z'$ à une distance $z'(\mathrm{A}') = \ell'$ de l'origine O′. Exprimez $z'(\mathrm{A}')$ dans $\mathcal{R}'$ en fonction de sa position $z(\mathrm{A}')$ dans $\mathcal{R}$ et du temps t.

7. — En vous souvenant que la longueur d'un objet se mesure dans un référentiel donné en repérant la position de ses extrémités *au même instant* dans ce référentiel, déduisez-en la relation entre $\ell = z(\mathrm{A}') - z(\mathrm{O}')$ et $\ell' = z'(\mathrm{A}') - z'(\mathrm{O}')$.

8. — Considérons le volume cylindrique du fil délimité par les points O′ et A′ (figure ci-contre). Quel est son volume V (respectivement V') dans le référentiel $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) ? En utilisant le fait que la charge électrique totale Q contenue dans ce cylindre est la même dans les deux référentiels, déduisez-en la relation qui relie la densité de charge électrique ρ vue dans $\mathcal{R}$ et ρ' vue dans $\mathcal{R}'$.



9. — Retrouvez la relation entre ρ et ρ' en écrivant le quadrivecteur-courant $\widetilde{\mathbf{j}}$: $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ dans les deux référentiels et en exploitant l'invariance de $\widetilde{\mathbf{j}}^2 = j^\mu j_\mu$.

2.2. Champ électrique

Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$: dans $\mathcal{R}'$ les charges sont immobiles, et nous sommes en présence d'un problème classique d'électrostatique.

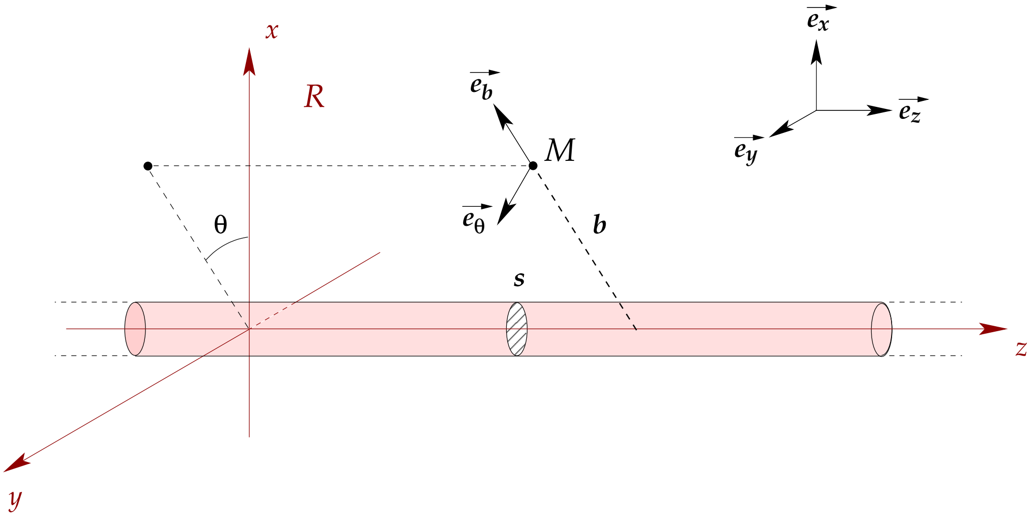


FIGURE 6 – *Choix des coordonnées : on notera b la distance d'un point quelconque M au fil.*

Soit un point M quelconque dans le référentiel $\mathcal{R}'$, situé à une distance b de l'axe z' du fil infini.

10. — On repère le point M par ses coordonnées polaires b', θ', z' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, et b, θ, z dans $\mathcal{R}$ (figure 6). Exprimez b et θ en fonction de b' et θ'.

11. — En utilisant des arguments de symétrie, montrez que le champ électrique $\mathbf{E}'(\mathrm{M})$ est nécessairement radial, et qu'il n'est fonction que de b : $\mathbf{E}'(\mathrm{M}) = E'(b)\,\mathbf{e_b}$.

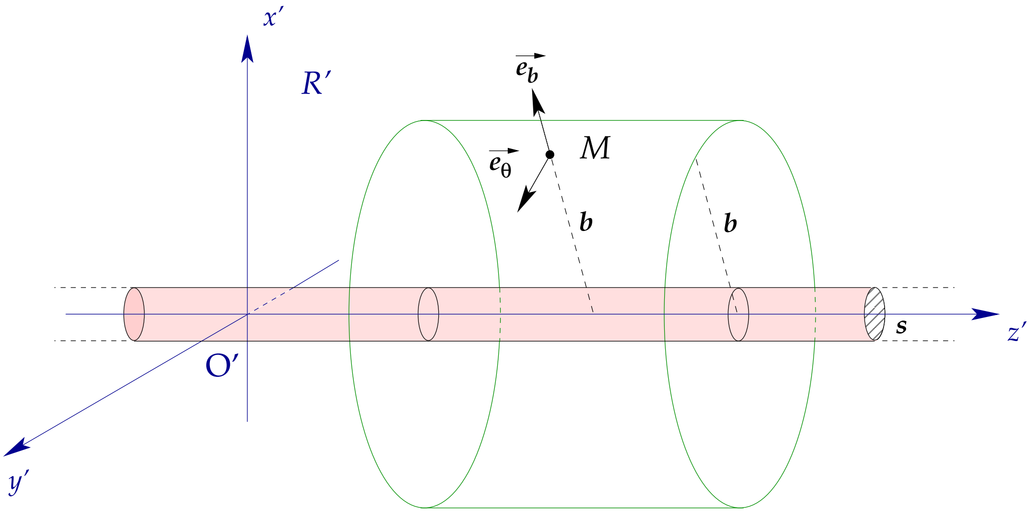


FIGURE 7 – *Volume cylindrique de rayon b pour le calcul du champ électrique par le théorème de Gauss.*

12. — En appliquant le théorème de Gauss pour un volume cylindrique bien choisi (voir fig. 7), montrez que l'expression de l'intensité du champ électrique $\mathbf{E}'(b)$ à l'extérieur du fil est :

$$\mathbf{E}'(b) = E'(b)\,\mathbf{e_b} = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b}\,\mathbf{e_b}$$

On rappelle la forme générale du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

13. — Donnez explicitement l'expression du tenseur $\widetilde{\mathbf{F}'}$: $F'^{\mu\nu}$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ pour un point quelconque M situé à l'extérieur du fil chargé.

14. — Rappelez comment se transforme un tenseur contravariant de rang 2 par changement de référentiel galiléen.

15. — En utilisant le résultat précédent, déduisez-en l'expression du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Identifiez avec l'expression générale du tenseur $F^{\mu\nu}$, et donnez l'expression des composantes (E_x, E_y, E_z) et (B_x, B_y, B_z) des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

16. — En vous plaçant dans le référentiel $\mathcal{R}$ et en utilisant de nouveau le théorème de Gauss, retrouvez l'expression du champ $\mathbf{E}(\mathrm{M})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Commentez.

2.3. Champ magnétique

On considère maintenant le système dans le référentiel $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel, le fil est parcouru par un courant I.

17. — Montrez que, par symétrie, l'intensité du champ magnétique B en un point M quelconque (à l'extérieur du fil) n'est fonction que de b, et que $\mathbf{B}$ est nécessairement orthoradial : $\mathbf{B} = B(b)\,\mathbf{e}_\theta$.

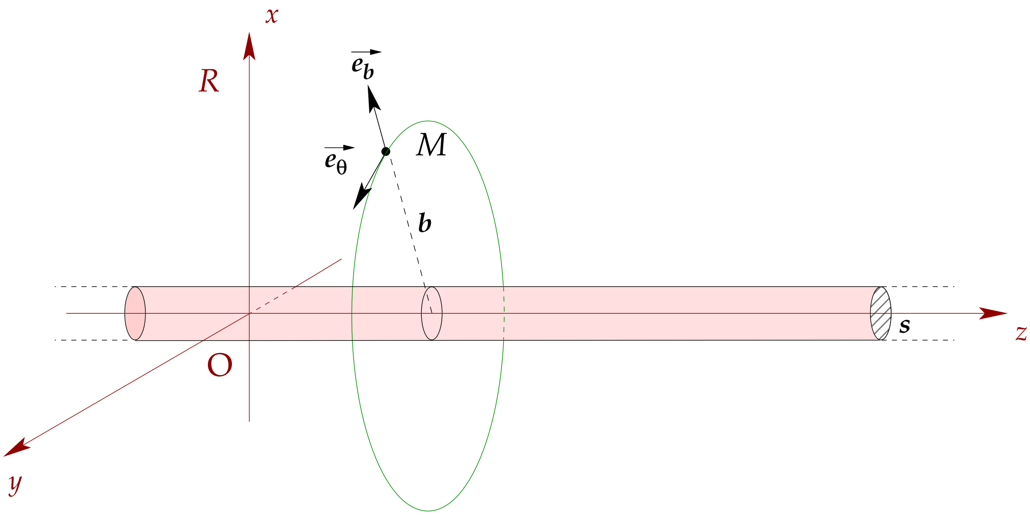


FIGURE 8 – *Contour circulaire de rayon b pour le calcul du champ magnétique au point M par le théorème d'Ampère.*

18. — En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour astucieusement choisi (fig. 8), montrez que le champ magnétique vaut :

$$\mathbf{B}(b) = B(b)\,\mathbf{e}_\theta \qquad \text{avec} \quad B(b) = \frac{\mu_0 j s}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

19. — Montrez que ce résultat est cohérent avec les composantes (B_x, B_y, B_z) que vous avez obtenues précédemment par transformation du tenseur $F^{\mu\nu}$.

Commentez : en quoi le champ magnétique est-il un effet purement relativiste ?

3. Lagrangien du champ électromagnétique

Les équations du champ électromagnétique peuvent s'écrire sous la forme d'un lagrangien $\mathcal{L}$ (en fait plutôt une densité lagrangienne, scalaire défini en tout point de l'espace) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

À partir des équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0$$

retrouvez les équations de Maxwell sous forme relativiste ("relations aux sources").

4. Effet Doppler

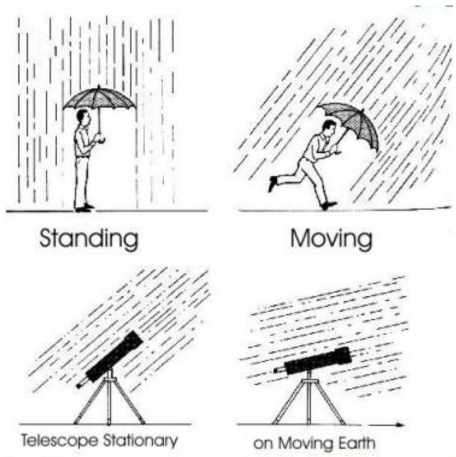
En utilisant le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, retrouvez la loi de l'effet Doppler relativiste.

5. Distribution angulaire de la lumière émise (effet phare)

Une source de lumière O' émet des photons de manière isotrope dans son référentiel R'. Cette source lumineuse est animée d'une vitesse $c/2$ par rapport au référentiel R. Etudiez la distribution angulaire des photons dans R autour de la direction Ox (direction du mouvement relatif).

6. Aberration de la lumière

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley en 1725 : lorsqu'on observe une étoile au cours de l'année, celle-ci semble décrire une ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile. L'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement.



1. — Considérons un observateur lié au soleil qui voit une étoile lointaine dans la direction du pôle de l'écliptique (axe Oz de l'orbite terrestre). On appelle v la vitesse d'un astronome situé sur terre observant la même étoile. Calculez l'angle apparent θ' que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique pour l'astronome. Faites l'application numérique ($v \simeq 30\,\mathrm{km.s}^{-1}$).

2. — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle θ par rapport au pôle de l'écliptique. Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de θ. On pourra se servir de l'invariance du produit $\widetilde{\mathbf{k}} \cdot \widetilde{\mathbf{r}}$.