PHYTEM– LP353 – RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN – CORRIGÉ

Année Universitaire 2015–2016

Mercredi 18 novembre 2015, 9h00 – 12h00

[Total : 50 pts]

1. Transformations de Lorentz, vitesse, énergie et impulsion **[10 pts]**

1 pt **1.1 —** Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ se déplacant à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Écrivez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1 pt **1.2 —** Si la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ était selon l'axe Oz au lieu de Ox, *i.e.* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \dfrac{z - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma\,(z - \beta ct) \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta z') \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma\,(z' + \beta ct') \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe $\mathrm{O}x$ ***:*** $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$***.***

1 pt **1.3 —** Déduisez-en les lois de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\begin{cases} u'_x &= \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z &= \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x &= \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y &= \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z &= \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \end{cases}$$

1 pt **1.4 —** Précisez les cas limites intéressants.

D'une part, on montre facilement que pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière, la loi de composition des vitesses tend vers la limite classique :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \simeq u'_x + v \quad \text{quand} \quad u'_x \ll c \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'autre part, on constate immédiatement que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : par exemple, quand $u'_x = c$, on obtient alors dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c}} = c$$

De même, lorsque $v = c$, on aura alors $u_x = c$.

1 pt **1.5 —** En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Sa vitesse u mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} \qquad \frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $a = u'/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u'}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leq a < 1$, on en déduit que $0 < 1 - a \leq 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - a) > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \qquad \text{d'où} \qquad \beta - a\beta < 1 - a \qquad \text{soit} \qquad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

$$\frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c.

1 pt **1.6 —** Donnez la loi de transformation de l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$. Commentez. Qu'est-ce que le temps propre τ ?

Pour deux événements se produisant au même point dans $\mathcal{R}'$, séparés par un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t'$, on aura $\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t) = 0$, et donc $\mathrm{d}x = \beta c\mathrm{d}t = vt$. L'intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ vaut ainsi :

$$c\mathrm{d}t' = \gamma(c\mathrm{d}t - \mathrm{d}x) = \gamma(1 - \beta^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}t' > \mathrm{d}t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Pour un observateur, le temps $\mathrm{d}\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$.

1 pt **1.7 —** Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ du point matériel M. Comment ses composantes U^μ se transforment-elles lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Que vaut la pseudo-norme de $\widetilde{\mathbf{U}}$? Est-ce un invariant ?

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2.$$

1 pt **1.8 —** Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ du point matériel M. Montrez rapidement que sa pseudo-norme carrée $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = A_\mu A^\mu$ vaut $-a^2$ où a est l'accélération propre mesurée dans le référentiel inertiel instantané (référentiel tangent).

Le quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la dérivée du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\,\mathbf{u} + \gamma^2(u)\,\dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Si on se place dans le référentiel tangent à l'objet en mouvement, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse $\mathbf{u}$ est nulle et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, on trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{A}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération propre (*i.e.* mesurée dans le référentiel propre de l'objet).

2 pts **1.9 —** Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ du point matériel M. Retrouvez l'expression de ses composantes et les identités remarquables associées (pseudo-norme, expressions simples de β et γ en fonction des composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$, etc).

À partir du quadrivecteur vitesse, on construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}} \qquad p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

2. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme [17 pts]

3 pts **2.1 —** Question de cours : à partir de l'équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En partant de sa forme covariante, on explicite l'équation en faisant varier l'indice ν de 0 à 3.

Pour $\nu = 0$, on obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c\rho$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 c\rho \\ \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c\rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où on reconnaît l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Explicitons maintenant l'équation sous forme covariante pour $\nu = 1$. On obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 = \mu_0 j_x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j_x \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

où on reconnaît la composante selon x de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En faisant de même pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

2 pts **2.2 —** Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes contravariantes p^μ et covariantes p_μ.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

1 pt **2.3 —** Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\widetilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie E de la particule et de sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$.

$\widetilde{\mathbf{f}}$ est la dérivée d'un quadrivecteur par rapport au temps propre τ, qui est un invariant de Lorentz : ses composantes se transforment donc bien selon Lorentz, et $\widetilde{\mathbf{f}}$ possède bien les propriétés d'un quadrivecteur.

On a donc :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

Pour les composantes contravariantes, cela donne :

$$f^\mu = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

D'où

$$f^\mu = \left(\gamma(u)\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(u)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

2 pts **2.4 —** Montrez que pour une particule de quadrivitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ subissant une quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}}$, on a $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$. Déduisez-en que :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\gamma(u) m \mathbf{u}\right)}{\mathrm{d}t}$$

Le quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ vérifie :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}^2}{\mathrm{d}\tau} = 2\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0$$

Or, le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ peut encore s'écrire :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} \qquad \text{d'où} \qquad \widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$$

Si on explicite cette dernière relation avec les composantes f^μ et U_μ, on trouve :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = \gamma^2(u) \left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u}\right] = 0$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

On retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'une particule par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

1 pt **2.5 —** Donnez explicitement $F^{\mu\nu}$ dans la région de l'espace où $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

Dans le référentiel du laboratoire, les composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$ du tenseur du champ électromagnétique se réduisent à :

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une particule de charge q placé dans le champ : on note $\widetilde{\mathbf{r}}$ sa position, $\mathbf{u}$ son vecteur vitesse et $\widetilde{\mathbf{U}}$ sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadriforce de Lorentz $\widetilde{\mathbf{f}}$ qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu. \tag{1}$$

1 pt **2.6 —** Rappelez l'expression des composantes contravariantes U^μ et covariantes U_μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$.

Le quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Et ses composantes covariantes sont :

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ -\gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

1 pt **2.7 —** À partir de l'équation (1), donnez explicitement les composantes f^0, f^1, f^2 et f^3 du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{f}}$.

Les composantes contravariantes f^μ du quadrivecteur force de Lorentz $\widetilde{\mathbf{f}}$ vérifient :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu \, U^\nu = qF^{\mu\nu} \, U_\nu.$$

Écrivons explicitement chaque composante. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f^0 &= qF^{00}\, U_0 + qF^{01}\, U_1 + qF^{02}\, U_2 + qF^{03}\, U_3 = \gamma(u)qE_x\frac{u_x}{c} \\ f^1 &= qF^{10}\, U_0 + qF^{11}\, U_1 + qF^{12}\, U_2 + qF^{13}\, U_3 = \gamma(u)qE_x \\ f^2 &= qF^{20}\, U_0 + qF^{21}\, U_1 + qF^{22}\, U_2 + qF^{23}\, U_3 = 0 \\ f^3 &= qF^{30}\, U_0 + qF^{31}\, U_1 + qF^{32}\, U_2 + qF^{33}\, U_3 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x\,\frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x\mathbf{e}_x\right)$$

2 pts **2.8 —** Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie E et la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x = a\,\mathbf{e}_x \qquad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

D'après la question précédente, la force de Lorentz s'écrit ici :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x\,\frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x\mathbf{e}_x\right)$$

Or, on a par ailleurs :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

En identifiant, on trouve immédiatement :

$$qE_x\,\frac{u_x}{c} = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x.$$

2 pts **2.9 —** À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Déduisez-en l'expression de la vitesse u en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité φ).

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, vers quelle valeur tend u ? Comparez avec le cas classique.

À partir de l'équation précédente,

$$\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

Ce qui donne, en intégrant,

$$\gamma(u)\mathbf{u} = \gamma(u(t=0))\mathbf{u}(t=0) + \int_0^t \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = \frac{qE_x t}{m}\,\mathbf{e}_x$$

La vitesse $\mathbf{u}$ est par conséquent selon $\mathbf{e}_x$: $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$. En remplaçant $\gamma(u)$ par son expression,

$$\frac{u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE_x t}{m} = at$$

en posant $a = qE_x/m$. Ce qui donne :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$$

Pour de grandes valeurs de t, autrement dit au bout d'un temps assez long, la vitesse de la particule accélérée tend vers c :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2t^2}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} c$$

Dans le traitement classique de ce phénomène, l'accélération de la particule serait $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = qE_x/m = a$, et on obtiendrait une trajectoire rectiligne uniformément accélérée :

$$u = at = \frac{qE_x}{m}\,t \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1}{2}\,at^2$$

La description classique n'interdit donc pas à la particule d'atteindre au bout d'un temps $t = c/a$ la vitesse de la lumière, puis de la dépasser. Le traitement relativiste du même problème physique interdit cela, en accord avec l'expérience.

2 pts **2.10 —** Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t. On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh}\beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

D'après ce qui précède, la vitesse $u(t)$ s'écrit :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = c\tanh\varphi$$

En se souvenant que $\gamma(u) = \cosh\varphi$ et que $\beta\gamma = \sinh\varphi$, on trouve :

$$\cosh\varphi = \gamma(u) = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad \sinh\varphi = \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} = \frac{at}{c}$$

De l'équation différentielle précédente,

$$\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = a,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

on tire aussi une relation entre φ et t :

$$\mathrm{d}(\gamma(u)u) = c\,\mathrm{d}\left(\cosh\varphi\tanh\varphi\right) = a\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\left(\sinh\varphi\right) = \frac{c}{a}\,\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On peut désormais exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de φ :

$$\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}t = \frac{at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a}\,\frac{\sinh\varphi\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{c^2}{a}\,\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

D'où on déduit, en intégrant le long de la trajectoire :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mathrm{d}x = \frac{c^2}{a}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c^2}{a}\left[\cosh\varphi(t) - 1\right] = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right].$$

Ce qui donne :

$$\widetilde{\mathbf{r}}(t) : r^\mu(t) = \left(ct, \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right], 0, 0\right)$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve le résultat classique :

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right] \simeq \frac{c^2}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2}at^2$$

3. Elargissement des raies dans le spectre d'une nova [10 pts]

On considère une source lumineuse ponctuelle S, qui émet dans son référentiel propre $\mathcal{R}'$ un rayonnement monochromatique de fréquence ν' et de longueur d'onde $\lambda' = c/\nu'$. Cette source se déplace à vitesse constante $\mathbf{v} = \beta c$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ de l'observateur.

On se placera dans le cadre des transformations spéciales de Lorentz (*i.e.* on choisira les axes Ox et Ox' des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ parallèles au mouvement relatif).

5 pts **3.1 —** La source ponctuelle S émet un rayonnement dans une direction faisant un angle θ' par rapport à son sens de déplacement : ce rayonnement est reçu par l'observateur dans le référentiel $\mathcal{R}$ sous un angle θ.

a. **[1 pt]** Representer sur un schéma la source S, l'observateur A, les vecteurs $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\beta}$ (respectivement $\mathbf{k}'$, $\boldsymbol{\beta}'$), l'angle θ (resp. θ') vus dans le référentiel $\mathcal{R}$ et respectivement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

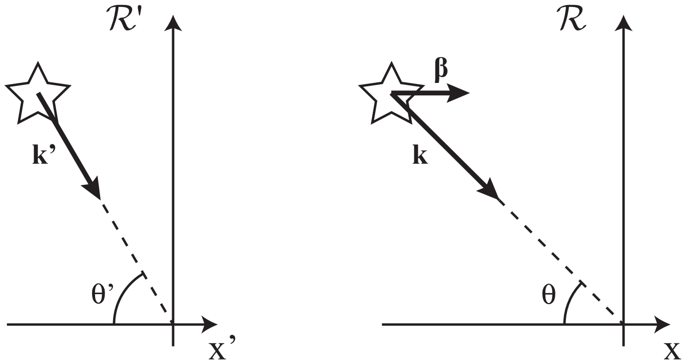
b. **[1 pt]** Quelles sont la fréquence ν et la longueur d'onde λ du rayonnement en fonction de l'angle θ de la ligne de visée de l'observateur ?

c. **[1 pt]** Quel est l'angle θ (on exprimera son cosinus) sous lequel l'observateur voit la lumière par rapport à la direction donnée par le vecteur $\boldsymbol{\beta}$?

d. **[1 pt]** Entre quelles valeurs extrêmes λ_{min} et λ_{max} la longueur d'onde varie-t-elle ? On exprimera ces valeurs en fonction de β et λ' uniquement.

e. **[1 pt]** Pour quelles valeurs de θ, θ_{min} et θ_{max} ces valeurs extrêmes sont-elles obtenues ?

a. Figure :



b. Soit $\widetilde{\mathbf{k}}'$ le quadri-vecteur d'onde du rayonnement dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, la direction du rayonnement fait un angle θ' avec la direction de déplacement de la source. On a donc dans $\mathcal{R}'$ (seules les deux premières coordonnées nous seront utiles) :

$$\widetilde{\mathbf{k}}' : k'^{\mu} = \left(k'^0 = \frac{2\pi\nu'}{c}; k'^1 = \frac{2\pi\nu'}{c}\cos\theta'; k'^2 = \frac{2\pi\nu'}{c}\sin\theta'; k'^3 = 0 \right)$$

et dans $\mathcal{R}$

$$\widetilde{\mathbf{k}} : k^{\mu} = \left(k^0 = \frac{2\pi\nu}{c}; k^1 = \frac{2\pi\nu}{c}\cos\theta; k^2 = \frac{2\pi\nu}{c}\sin\theta; k^3 = 0 \right)$$

Les composantes k'^{μ} s'obtiennent à partir des composantes k^{μ} par les transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1) \\ k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0) \end{cases}$$

Il vient donc :

$$\begin{cases} \nu' = \gamma\nu(1 - \beta\cos\theta) \\ \nu'\cos(\theta') = \gamma\nu(\cos\theta - \beta). \end{cases} \tag{2}$$

La première ligne, qui correspond à l'effet Doppler, donne :

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}.$$

En passant des fréquences aux longueurs d'onde ($\lambda = c/\nu$), on obtient :

$$\lambda = \lambda'\gamma(1 - \beta\cos\theta).$$

c. En éliminant ν' dans la deuxième ligne de l'équation (2), on obtient la relation suivante entre $\cos\theta$ et $\cos\theta'$:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}.$$

C'est la formule de l'effet phare.

d. $\cos\theta$ varie entre -1 et 1. Par conséquent λ varie entre λ_{min} et λ_{max}, avec

$$\lambda_{\text{min}} = \lambda' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

pour $\cos\theta = +1$ (les atomes se rapprochent de l'observateur, on constate un décalage vers le bleu) et

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

pour $\cos\theta = -1$ (les atomes s'éloignent de l'observateur, décalage vers le rouge).

e. θ varie entre $\theta_{\text{min}} = 0$ et $\theta_{\text{max}} = \pi$.

Une étoile explose en éjectant de la matière de façon isotrope : c'est le phénomène de **nova** (ou de **supernova** dans les cas les plus violents). On considère que le rayon de la surface de l'étoile (ou plutôt de la sphère de matière éjectée) croît linéairement dans le temps à la vitesse constante v. À la surface en expansion de l'étoile, les atomes (Ca, O, Fe, Ne, etc) émettent des photons par désexcitation de leurs nuages électroniques. Chaque atome peut être vu comme une source ponctuelle. En mesurant le spectre de la nova (la distribution des longueurs d'onde des photons reçus), il est possible d'observer un ensemble de raies spectrales caractéristiques des éléments chimiques présents.

L'observateur situé sur Terre s'intéresse à une raie lumineuse particulière du spectre de l'étoile, de longueur d'onde λ' (dans le référentiel au repos de l'atome émetteur). À cause de l'effet Doppler dû à la vitesse de la matière s'éloignant du centre de la nova, l'observateur observe un élargissement $\Delta\lambda$ de cette raie.

2 pts **3.2 —** Expliquez cet élargissement. Montrez que la vitesse d'éjection v en fonction du taux d'élargissement $r = \Delta\lambda/\lambda'$ est donnée par

$$v = \frac{r\,c}{\sqrt{4+r^2}}.$$

Que devient cette expression lorsque $v \ll c$?

Les atomes sont éjectés de manière isotrope autour de la nova. Certains s'éloignent de l'observateur, d'autres s'en rapprochent. Comme tous ces atomes émettent de la lumière (de longueur d'onde λ' dans leur propre référentiel), la longueur d'onde reçue varie entre λ_{min} et λ_{max} calculés à la question précédente. On a donc $\Delta\lambda = \lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}$ et

$$r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

En élevant au carré, on trouve que

$$r^2 = \frac{4\beta^2}{1-\beta^2}$$

ce qui donne finalement

$$\beta = \frac{r}{\sqrt{4+r^2}}$$

et

$$v = \frac{rc}{\sqrt{4+r^2}}.$$

A partir de l'expression de r^2, et si $\beta \ll 1$, on obtient $r \approx 2\beta$. Par conséquent, $v \approx rc/2$.

1 pt **3.3 —** Sachant que le rayon angulaire de la nova augmente d'un angle $\Delta\alpha$ pendant une durée Δt, exprimez la distance D entre la nova et la Terre. Que devient cette expression lorsque $v \ll c$?

Comme le rayon de l'étoile croît avec la vitesse v, et que l'étoile est à la distance D (très grande par rapport au rayon de la nova) de l'observateur sur Terre, l'accroissement de l'angle pendant une durée Δt est tel que

$$\tan \Delta\alpha \approx \Delta\alpha = \frac{v\,\Delta t}{D}.$$

On a donc

$$D = \frac{rc\Delta t}{\Delta\alpha\,\sqrt{4+r^2}}.$$

Lorsque $v \ll c$, on a vu que $v \approx rc/2$, donc on a

$$D \approx \frac{rc\Delta t}{2\Delta\alpha}.$$

2 pts **3.4 —** On fera l'application numérique pour la raie $\lambda' = 393.3\,\mathrm{nm}$ du calcium. On constate une largeur de raie due à l'effet Doppler de $\Delta\lambda = 1.1\,\mathrm{nm}$.

a. Calculez la vitesse d'éjection v des gaz de la nova. La formule non relativiste est-elle justifiée dans ce cas ?

b. On constate une augmentation angulaire du rayon $\Delta\alpha = 0.20''$ en un an. Quelle est la distance entre la nova et la Terre (en années-lumière) ?

a. On a

$$r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} \approx 0.0028,$$

En exprimant les vitesses en km/s, on obtient :

$$v = \frac{r\,c}{\sqrt{4+r^2}} \approx \frac{0.0028\ \times\ 3\times10^5}{\sqrt{4+0.0028^2}} \approx 420\ \mathrm{km/s}.$$

Dans ce cas, $\beta \approx 0.01$: l'approximation non-relativiste est justifiée.

b. Ici, il est plus facile d'exprimer la distance en années-lumière. Comme $\Delta t = 1$ an et comme $c = 1$ a.l./an, on a simplement :

$$D \approx \frac{r}{2\,\Delta\alpha} \approx \frac{0.0028}{2\ \times\ (0.20/3600)\ \times\ \pi/180} \approx 1442\ \mathrm{a.l.}$$

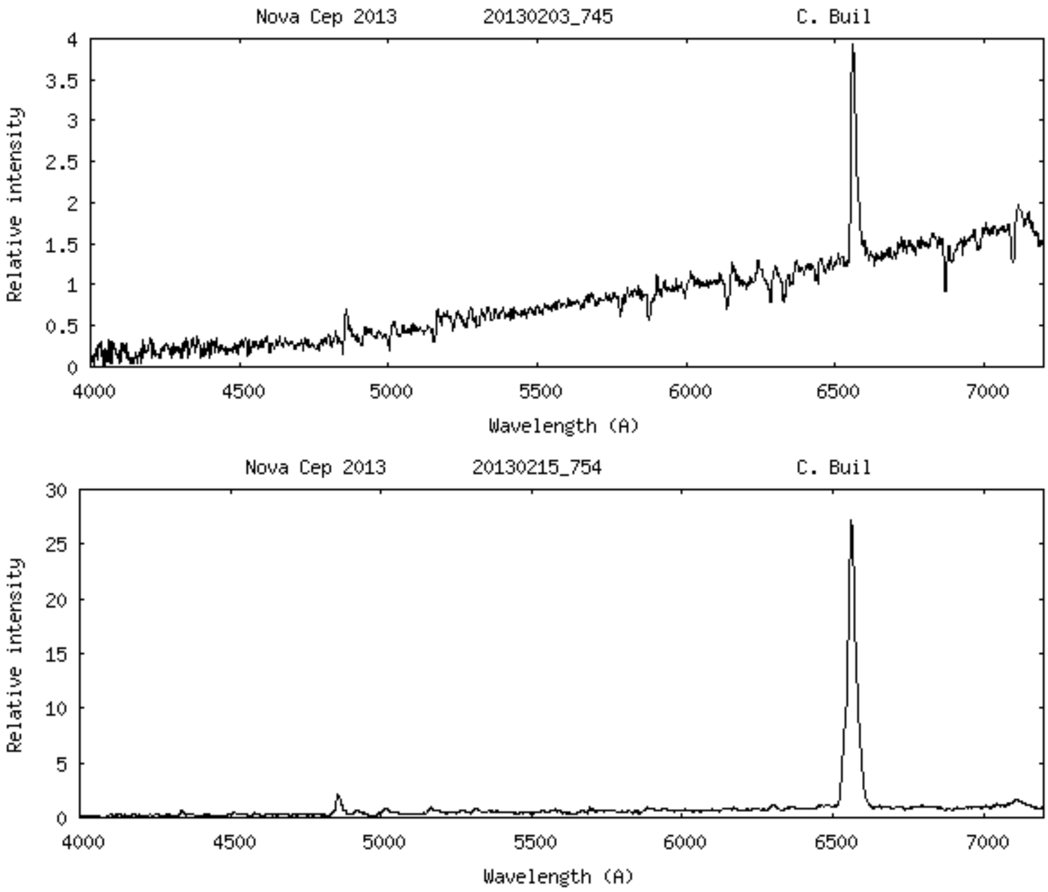


FIGURE 1 – *Spectres de la Nova Cep 2013, pris à 12 jours d'intervalle. L'élargissement de la raie d'émission Hα (656.3 nm) est bien visible (Source : AAVSO). En pratique, le modèle d'élargissement des raies présenté dans cet exercice est beaucoup trop simple pour décrire l'évolution du profil des raies pour les novae et les supernovae.*

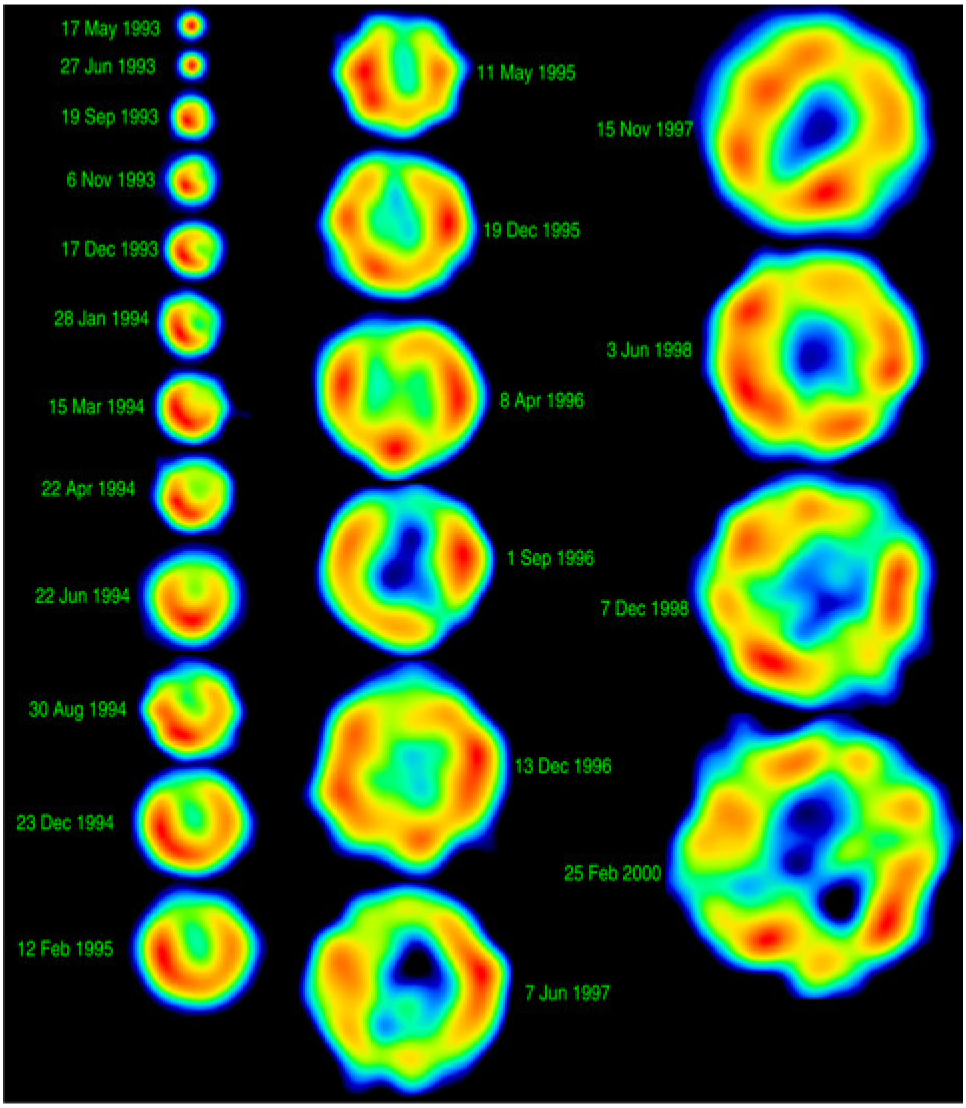


FIGURE 2 – Évolution de l'éjectat de la supernova SN1993J entre le 17 mai 1993 et le 25 février 2000. Toutes les images ont la même échelle. Dans sa phase initiale, l'éjectat a une vitesse $\beta \approx 0.05$ puis ralenti pour atteindre une vitesse $\beta \approx 0.03$ en février 2000. Il s'agit ici d'une supernova et non d'une nova.

4. Physique des tachyons **[13 pts]**

Le tachyon est une particule hypothétique dont la vitesse u est supérieure à c. En se basant uniquement sur cette hypothèse, on peut tenter de décrire les propriétés d'une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

FIGURE 3 – *Tachyon en peluche, The Particle Zoo.*

2 pts **4.1 —** Montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$.

Considérons un tachyon se déplaçant à la vitesse $u > c$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. Sa vitesse u' mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}'$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}} \qquad \frac{u'}{c} = \frac{\dfrac{u}{c} - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{u}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $a = u/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u}{c} > 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Il est nécessaire de distinguer trois cas selon le signe du dénominateur.

a. Si $uv < c^2$, c'est à dire si $a\beta < 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est positif.
Comme $0 \leq \beta < 1$, on en déduit que $1+\beta \geq 1 > 0$; en multipliant l'inégalité $a > 1$ par $1+\beta > 0$, on obtient ainsi :

$$a(1+\beta) > 1 + \beta \qquad \text{d'où} \qquad a + a\beta > 1 + \beta \qquad \text{soit} \qquad a - \beta > 1 - a\beta$$

Et par conséquent, comme $1 - a\beta > 0$,

$$\frac{u'}{c} = \frac{\dfrac{u}{c} - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{u}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{a - \beta}{1 - a\beta} > 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u' > c$$

b. Si $uv > c^2$, c'est à dire si $a\beta > 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est négatif.
Comme $a > 1$, alors $1 + a > 2 > 0$. On peut donc multiplier l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 + a)$, ce qui donne :

$$\beta(1+a) < 1 + a \qquad \text{d'où} \qquad \beta + a\beta < 1 + a \qquad \text{soit} \qquad a\beta - 1 < a - \beta$$

Et par conséquent, comme $a\beta - 1 > 0$,

$$\frac{a-\beta}{a\beta - 1} > 1 \qquad \text{d'où, en multipliant par } -1, \qquad \frac{u'}{c} = \frac{a-\beta}{1-a\beta} < -1$$

C'est à dire : $u' < -c$. Dans ce cas, le tachyon se déplace dans la direction opposée, avec une vitesse supérieure à c en norme.

c. Enfin, si $uv = c^2$, la vitesse u' du tachyon dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est infinie.

Pour un tachyon de vitesse $u > c$ dans $\mathcal{R}$, sa vitesse u' dans $\mathcal{R}'$ est toujours supérieure à c en norme. Un tachyon se déplace donc à une vitesse plus grande que c dans tous les référentiels galiléens.

1 pt **4.2 —** Sur un diagramme d'espace-temps, indiquez les axes x et t du référentiel $\mathcal{R}$. Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine $\mathrm{O}(t = 0, x = 0)$ *(Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).*

Voir la figure 4.

1.5 pt **4.3 —** Sur ce diagramme, dessinez :

— la ligne d'espace-temps d'un objet immobile en $x = x_0$;
— la ligne d'espace-temps d'un objet se déplaçant à la vitesse constante $w < c$;
— la ligne d'espace-temps d'un photon émis vers l'avant au point événement $\mathrm{A}(t_A, x_A)$ avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

Voir la figure 4.

2 pts **4.4 —** Dans le référentiel $\mathcal{R}$, un tachyon est émis en $\mathrm{A}(t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en $\mathrm{B}(t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d'univers (attention ! souvenez-vous que sa vitesse u est supérieure à c !).

Voir la figure 4.

1 pt **4.5 —** Quelle est la nature de l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$?

Posons :

$$\widetilde{\mathbf{AB}} : \begin{pmatrix} \Delta t = c(t_B - t_A) \\ \Delta \mathbf{r} = \mathbf{AB} \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le tachyon se déplace à la vitesse $u > c$. On a donc

$$\widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = (\Delta t)^2(c^2 - u^2) < 0 \qquad \text{car} \quad u > c$$

L'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est par conséquent de **genre espace** (pas de lien causal possible entre les événements A et B).

1.5 pt **4.6 —** Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$: indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, la réception du tachyon (événement B) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement A). Dessinez les axes t' et x' de ce référentiel $\mathcal{R}'$ sur votre dessin, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, $t'_B < t'_A$.

Écrivons la transformation de Lorentz des coordonnées $(c\Delta t, \Delta \mathbf{r})$ du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{AB}}$. En particulier, la coordonnée temporelle dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \gamma(v)\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = \gamma(v)\Delta t\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

Si $uv/c^2 < 1$, $\Delta t'$ est du même signe que Δt ; par contre, si $uv/c^2 > 1$, c'est à dire si $v/c > c/u$ (possible car $c/u < 1$), $\Delta t'$ sera du signe opposé de celui Δt. Autrement dit, lorsqu'on se place dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ en translation uniforme à la vitesse $v > c^2/u$, l'ordre temporel des événements A et B est inversé dans ce référentiel.

Voir la figure 4.

2 pt **4.7 —** Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité ? Proposez une interprétation de la succession des événements A et B dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

En se plaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v > c^2/u$ (avec toutefois $v < c$), on observe une inversion de l'ordre des événements A (émission du tachyon) et B (réception du tachyon). C'est à priori incompatible avec le principe de causalité. Un moyen de s'en sortir toutefois, est de décrire cette succession d'événements vus dans $\mathcal{R}'$ comme l'émission d'un anti-tachyon en B, suivi de sa réception en A. Par contre, pour conserver la compatibilité avec le principe de causalité, il est impératif que le tachyon ne transporte aucune information.

1 pt **4.8 —** On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u. Exprimée ainsi, son énergie est imaginaire, mais que pouvez-vous dire du comportement de $|E(u)|$ en fonction de u ? Combien d'énergie faut-il fournir pour faire ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$? Pour un tachyon, comment évolue son énergie (ou plutôt le module de son énergie) lorsqu'il accélère ?

L'énergie d'un tachyon de vitesse u s'écrit :

$$E(u) = \gamma(u) m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Comme $u > c$, le dénominateur est imaginaire : on peut encore écrire l'énergie sous la forme :

$$E(u) = i \frac{mc^2}{\sqrt{\dfrac{u^2}{c^2} - 1}}$$

On remarque immédiatement que le module $|E(u)|$ diminue quand la vitesse du tachyon augmente ; réciproquement, $|E(u)|$ croît quand u décroît ; de plus,

$$\lim_{u \to c} |E(u)| = \lim_{u \to c} \frac{mc^2}{\sqrt{\dfrac{u^2}{c^2} - 1}} = +\infty$$

l'énergie d'un tachyon tend vers l'infini quand sa vitesse tend vers c : il faudrait donc fournir une énergie infinie pour ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$.

1 pt **4.9 —** Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte ?

Les propriétés de l'hypothétique tachyon sont particulièrement étranges ; la relativité restreinte prédit en particulier que selon le référentiel, l'ordre des événements le long de la trajectoire d'un tachyon puisse être inversé, ce qui est incompatible avec le principe de causalité. L'existence effective de tachyons est donc un peu douteuse…

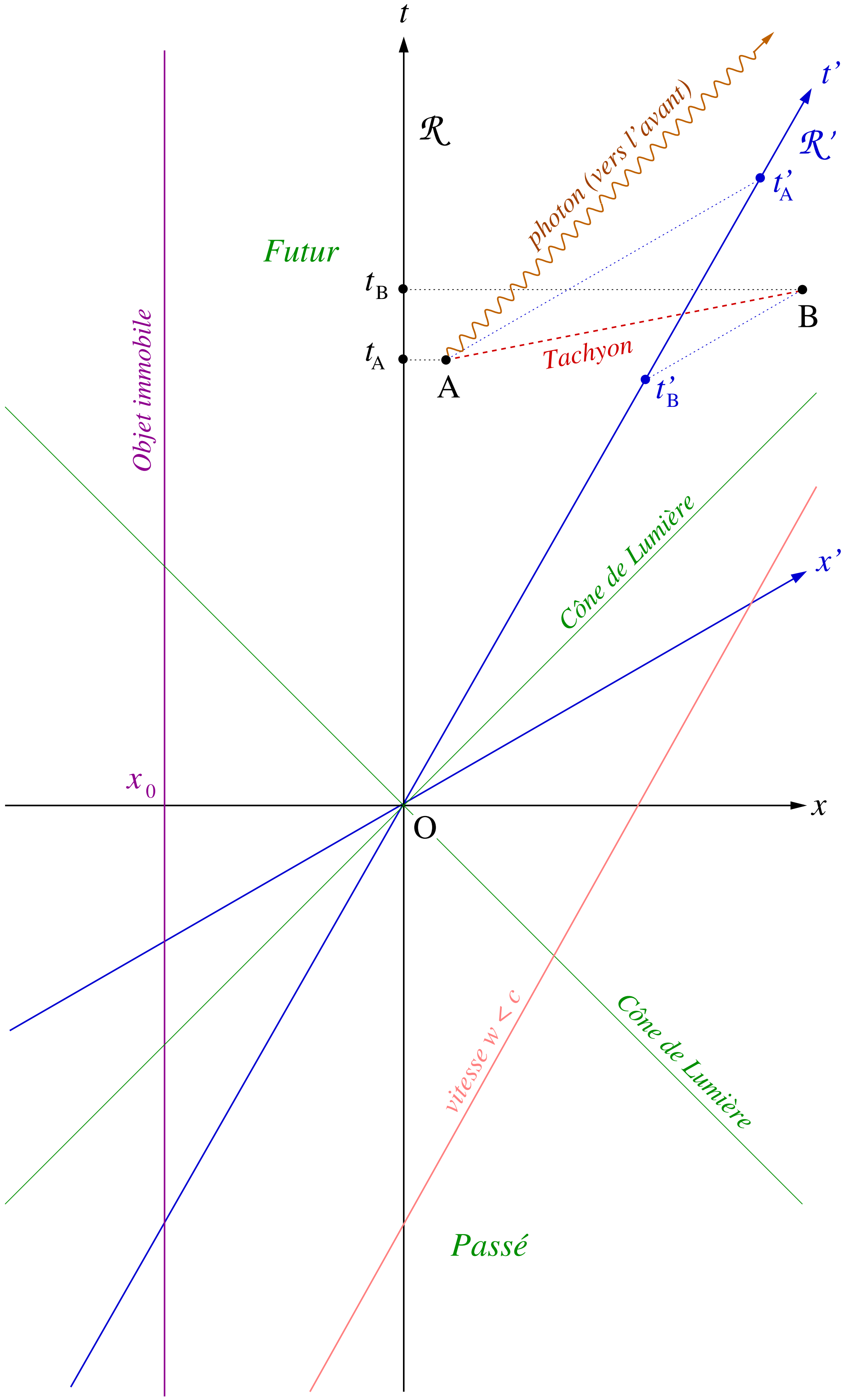


FIGURE 4 – Diagramme d'espace-temps ; trajectoire des tachyons

FIGURE 5 – *The Particle Zoo.*