PHYTEM– LP353 – Relativité restreinte

Examen – Corrigé

Année Universitaire 2016–2017

Mercredi 16 novembre 2016, 9h00 – 12h00

1. Transformations de Lorentz, vitesse, énergie et impulsion

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ se déplacant à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Écrivez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ était selon l'axe Oz au lieu de Ox, *i.e.* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \dfrac{z - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma\,(z - \beta ct) \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta z') \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma\,(z' + \beta ct') \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe $\mathrm{O}x$ ***:*** $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$***.***

1.3 — Déduisez-en les lois de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\begin{cases} u'_x &= \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z &= \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x &= \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y &= \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z &= \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \end{cases}$$

1.4 — Précisez les cas limites intéressants.

D'une part, on montre facilement que pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière, la loi de composition des vitesses tend vers la limite classique :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \simeq u'_x + v \quad \text{quand} \quad u'_x \ll c \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'autre part, on constate immédiatement que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : par exemple, quand $u'_x = c$, on obtient alors dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c}} = c$$

De même, lorsque $v = c$, on aura alors $u_x = c$.

1.5 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Sa vitesse u mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} \qquad \frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $a = u'/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u'}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leq a < 1$, on en déduit que $0 < 1 - a \leq 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - a) > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \qquad \text{d'où} \qquad \beta - a\beta < 1 - a \qquad \text{soit} \qquad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

$$\frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c.

1.6 — Donnez la loi de transformation de l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$. Commentez. Qu'est-ce que le temps propre τ ?

Pour deux événements se produisant au même point dans $\mathcal{R}'$, séparés par un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t'$, on aura $\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t) = 0$, et donc $\mathrm{d}x = \beta c\mathrm{d}t = vt$. L'intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ vaut ainsi :

$$c\mathrm{d}t' = \gamma(c\mathrm{d}t - \mathrm{d}x) = \gamma(1 - \beta^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}t' > \mathrm{d}t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Pour un observateur, le temps $\mathrm{d}\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$.

1.7 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ du point matériel M. Comment ses composantes U^μ se transforment-elles lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Que vaut la pseudo-norme de $\widetilde{\mathbf{U}}$? Est-ce un invariant ?

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2.$$

1.8 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ du point matériel M. Montrez rapidement que sa pseudo-norme carrée $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = A_\mu A^\mu$ vaut $-a^2$ où a est l'accélération propre mesurée dans le référentiel inertiel instantané (référentiel tangent).

Le quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la dérivée du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\,\mathbf{u} + \gamma^2(u)\,\dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Si on se place dans le référentiel tangent à l'objet en mouvement, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse $\mathbf{u}$ est nulle et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, on trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{A}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération propre (*i.e.* mesurée dans le référentiel propre de l'objet).

1.9 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ du point matériel M. Retrouvez l'expression de ses composantes et les identités remarquables associées (pseudo-norme, expressions simples de β et γ en fonction des composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$, etc).

À partir du quadrivecteur vitesse, on construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}} \qquad p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa “masse apparente”, et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

2. Composition des vitesses

2.1 — Dessinez les trajectoires du vaisseau et du héros (dans sa bulle, voir fig. 1, page 5) dans un diagramme d'espace-temps, en vous plaçant : (a) dans le référentiel d'un observateur extérieur (celui du narrateur qui voit le vaisseau et le personnage se déplacer à $v = 0.2c$) ; (b) dans le référentiel du vaisseau. *On prendra les axes (Ox) et (Ox') orientés selon la direction du mouvement du héros.*

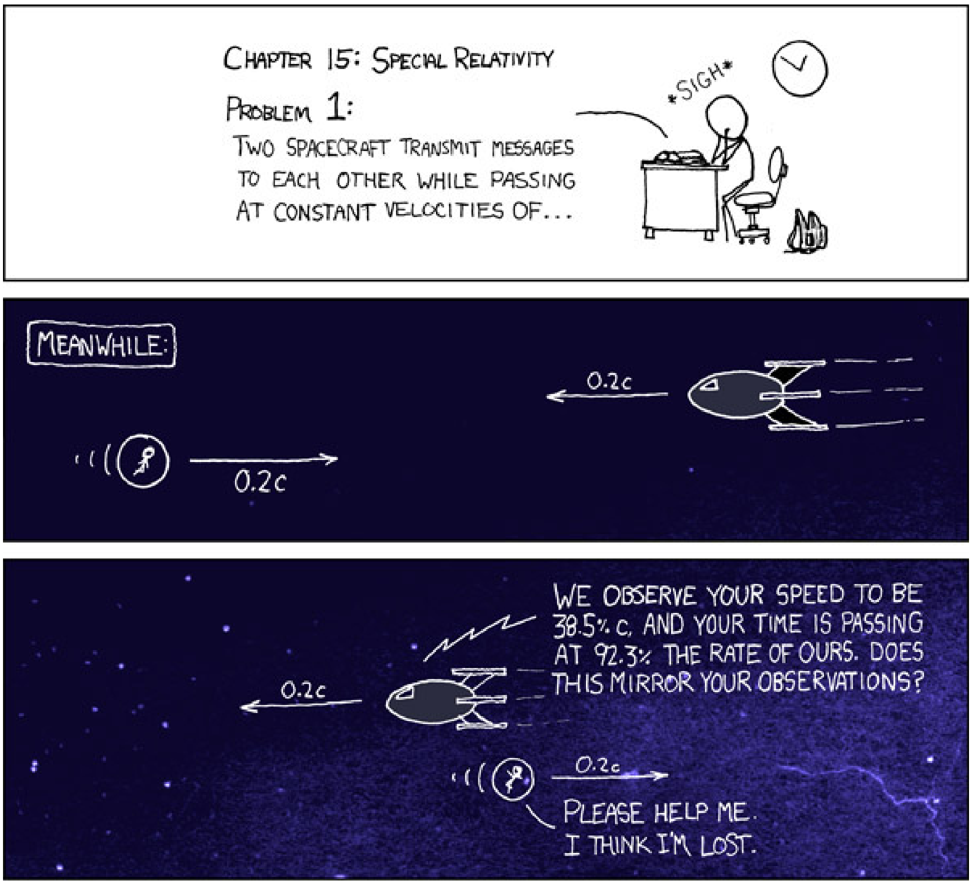
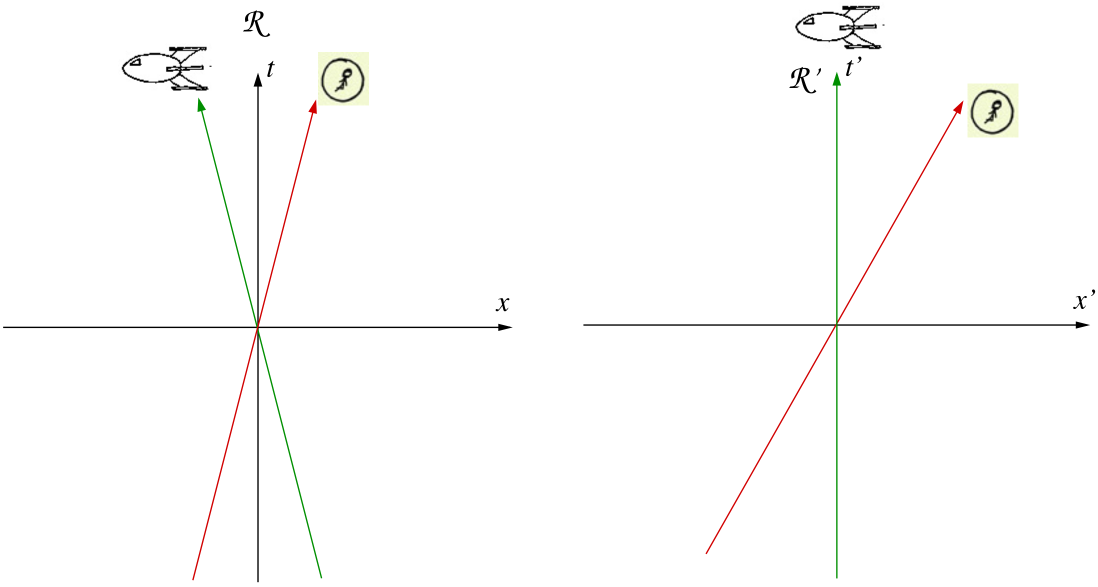


FIGURE 1 – *Chapitre 15 : Relativité restreinte. Problème 1. Deux vaisseaux se croisent à vitesse constante $v = 0.2c$ et se transmettent des messages...*
Pendant ce temps : nous mesurons votre vitesse relative comme étant 38.5% celle de la célérité de la lumière c, et votre temps s'écoule 92.3% plus lentement que le nôtre. Est-ce que cela reflète vos observations ? S'il vous plaît, aidez-moi, je suis perdu. (xkcd : `http://xkcd.com/265/`*)*



Diagrammes d'espace temps montrant : (à gauche) les trajectoires du vaisseau et du héros dans le référentiel du narrateur. (à droite) les trajectoires du vaisseau et du héros dans le référentiel du vaisseau.

2.2 — Calculez la vitesse relative du héros par rapport au vaisseau. Faites de même pour le vaisseau dans le référentiel du héros. Application numérique. Retrouvez-vous la valeur annoncée par le pilote du vaisseau ?

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du narrateur, et $\mathcal{R}'$ celui du vaisseau. La vitesse relative $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ vaut $v = -0.2c$ avec la convention choisie pour les axes. On a donc :

$$v_{\mathrm{h/v}} = u'_x(\text{héros/vaisseau}) = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.2c + 0.2c}{1 + \dfrac{0.2c \times 0.2c}{c^2}} = 0.4c/1.04 \simeq 0.385c$$

Par symétrie, la vitesse du vaisseau par rapport au référentiel du héros est la même, au signe près.

2.3 — Calculez le facteur γ(héros/vaisseau) entre les deux référentiels à partir de la vitesse calculée précédemment. Retrouvez l'expression du facteur γ(héros/vaisseau) en utilisant les quadrivecteurs vitesse des protagonistes et l'invariance du pseudo-produit scalaire. Application numérique.

À partir du calcul précédent :

$$\gamma(\text{héros/vaisseau}) = \gamma_{\mathrm{h/v}} = \left(1 - \frac{v_{\mathrm{h/v}}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{soit} \quad \gamma_{\mathrm{h/v}}^{-2} = 1 - \left(\frac{\dfrac{u_x}{c} - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}\right)^2$$

D'où,

$$\gamma_{\mathrm{h/v}}^{-2} = \frac{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2 - \left(\dfrac{u_x}{c} - \dfrac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \dfrac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2}$$

Ce qui donne :

$$\gamma_{\mathrm{h/v}} = \gamma(u_x)\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

On peut, par ailleurs, utiliser l'invariance du pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs vitesse du héros $\widetilde{\mathbf{U}}_h$ et du vaisseau $\widetilde{\mathbf{U}}_v$. En effet, dans le référentiel $\mathcal{R}$ du narrateur, et dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau, ces quadrivecteurs vitesse ont pour composantes :

$$\text{Dans } \mathcal{R} : \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{h}} : \begin{pmatrix} \gamma(u_x)c \\ \gamma(u_x)u_x\mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{v}} : \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)v\,\mathbf{e}_x \end{pmatrix} \qquad \text{dans } \mathcal{R}' : \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{h}} : \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{h/v}}c \\ \gamma_{\mathrm{h/v}}v_{\mathrm{h/v}}\,\mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{v}} : \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

L'invariance du pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{h}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{v}}$ donne :

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{h}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{v}} = \gamma_{\mathrm{h/v}}c^2 = \gamma(u_x)\gamma(v)c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

Ce qui donne immédiatement $\gamma_{\mathrm{h/v}}$:

$$\gamma_{\mathrm{h/v}} = \gamma(u_x)\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

Numériquement, on trouve (en se souvenant que $v = -0.2c$ et $u_x = 0.2c$ avec les conventions choisies) :

$$\gamma_{\mathrm{h/v}} = \gamma(0.2c)\gamma(0.2c)\left(1+(0.2)^2\right) = \gamma^2(0.2c)\left(1+(0.2)^2\right) = 0.96^{-1} \times 1.04 \simeq 1.0833$$

2.4 — Si deux événements successifs de la vie du héros sont séparés par un temps $\Delta\tau$ dans son référentiel, et par un intervalle Δt dans le référentiel du vaisseau, exprimez la relation entre $\Delta\tau$ et Δt. Le message du pilote quant à la vitesse d'écoulement du temps vous semble-t-il correct ?

Données : $(0.96)^{-1} = 1.0416$ $(0.96)^{-1/2} = 1.0206$ $\sqrt{0.8521} = 0.9231.$

Par invariance de la pseudo-norme de l'intervalle d'espace-temps, on a, pour deux événements de la vie du héros,

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t^2\left(1 - \frac{v_{\mathrm{h/v}}^2}{c^2}\right) \quad \text{d'où} \quad \Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma_{\mathrm{h/v}}}$$

Numériquement, cela donne : $\Delta\tau = \Delta t/\gamma_{\mathrm{h/v}} \simeq \Delta t/1.0833 \simeq 0.9231\Delta t$. Ce qui correspond bien au message du pilote.

3. Voyages intersidéraux

3.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante v sur une étoile située à $D = 8$ années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années. Quelle est la vitesse v du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

La durée du voyage vue depuis le référentiel du système solaire est :

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta\tau.$$

Avec $\gamma(v)$ constant puisque la vitesse est considérée comme constante pendant toute la durée du voyage, et $\Delta t = D/v$. On en déduit :

$$v = \frac{D}{\Delta t} = \frac{D}{\gamma\Delta\tau} = \frac{D}{\Delta\tau}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Ainsi,

$$v^2\left(1 + \frac{D^2}{c^2\Delta\tau^2}\right) = \frac{D^2}{\Delta\tau^2}$$

et

$$v = \frac{D}{\sqrt{\Delta\tau^2 + D^2/c^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{v}{c} = \frac{D/c}{\sqrt{\Delta\tau^2 + D^2/c^2}}$$

Si on exprime D en années-lumière, et $\Delta\tau$ en années, on obtient numériquement :

$$\frac{v}{c} = \frac{8\,\text{ans}}{\sqrt{(8\,\text{ans})^2 + (8\,\text{ans})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \quad \text{donc} \quad v \simeq 0.707c$$

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante a jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante $-a$, de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

3.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

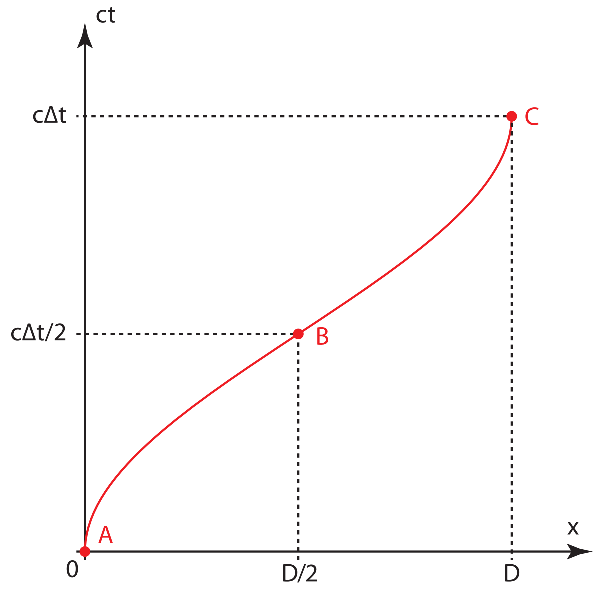


Diagramme d'espace temps montrant la trajectoire du vaisseau dans le référentiel du système solaire. (A) départ à vitesse nulle, début de la phase d'accélération propre constante. (B) fin de la phase d'accélération, début de la décélération. (C) fin de la décélération, arrivée à vitesse nulle.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années pour les occupants du vaisseau.

3.3 — Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et $\mathcal{R}'$ le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant t donné. Dans le référentiel tangent $\mathcal{R}'$, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t (ou t'), et vaut $\mathrm{d}v'$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$ (ou $t' + \mathrm{d}t'$). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$\mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\mathrm{d}v$$

Dans le référentiel tangent, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t' et vaut $\mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ à l'instant $t' + \mathrm{d}t'$.

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
$t' = \tau$	v	0
$t' + \mathrm{d}t' = \tau + \mathrm{d}\tau$	$v + \mathrm{d}v$	$\mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$

Pour déterminer $\mathrm{d}v'$, on applique la loi de composition des vitesses

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{vu}{c^2}}$$

à l'instant $t' + \mathrm{d}t' = \tau + \mathrm{d}\tau$, avec $u = v + dv$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}$, $u' = \mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}'$. Comme l'accélération est constante (mis à part le changement de signe au milieu du voyage), on a donc

$$\mathrm{d}v' = a\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\mathrm{d}v}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}v'\left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\mathrm{d}v}{c^2}\right] = \mathrm{d}v$$

On peut ici négliger le terme de second ordre $v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'/c^2$, ce qui donne

$$\mathrm{d}v'\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \mathrm{d}v \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v$$

3.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ en fonction de de $\mathrm{d}t$ et $\gamma(v)$. Déduisez-en une expression de $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en fonction de a et $\gamma(v)$.

De manière immédiate, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t/\gamma(v)$. En substituant $\mathrm{d}t'$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad a = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

3.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que $\mathrm{d}\tau$ est proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$. En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez $\Delta\tau$ en fonction de la rapidité à mi-parcours $\varphi_{1/2}$.

Pour ce calcul, on fait intervenir la rapidité φ :

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et par conséquent} \quad \frac{\mathrm{d}(\tanh\varphi)}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{c}.$$

Or

$$d(\tanh\varphi) = \frac{1}{\cosh^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)}\mathrm{d}\varphi.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)}.$$

On reprend maintenant l'expression de $\mathrm{d}\tau$:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a}\mathrm{d}v$$

Ce qui donne

$$\mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$\mathrm{d}\tau$ est donc bien proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$.

En intégrant sur la première moitié du parcours,

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \int_0^{\Delta\tau/2}\mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}}\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{a}\,\varphi_{1/2}.$$

Et, par symétrie, la durée totale du voyage (pour l'équipage du vaisseau) est :

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\,\varphi_{1/2}$$

3.6 — En se souvenant que $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, exprimez $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}\varphi$. Déduisez-en une expression de $\varphi_{1/2}$ en fonction de la distance totale à parcourir D.

On reprend les expressions trouvées aux questions précédentes :

$$a\,\mathrm{d}t = \gamma^3(v)\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)} = \frac{c}{\cosh^2\varphi}.$$

On a donc

$$\gamma^3(v)\mathrm{d}v = \gamma(v)c\mathrm{d}\varphi = a\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ainsi,

$$dx = v\,\mathrm{d}t = c\tanh\varphi\,\mathrm{d}t = \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

d'où,

$$\frac{D}{2} = \int_0^{D/2} dx = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}} \sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{et} \quad D = \frac{2c^2}{a}\left[\cosh\varphi_{1/2} - 1\right].$$

Ainsi,

$$\varphi_{1/2} = \operatorname{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2} + 1\right].$$

3.7 — On souhaite déterminer l'accélération a qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance $D = 8$ années-lumière en un temps propre de $\Delta\tau = 8$ ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est $8\xi \simeq 1.616$ soit $\xi \simeq 0.202$. Sachant que $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1} \simeq 9.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, Exprimez a en unités $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1}$ et en unités SI.

À l'aide des résultats des deux questions précédentes, on a

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\operatorname{argcosh}\left(\frac{Da}{2c^2} + 1\right),$$

ce qui donne

$$\frac{Da}{2c^2} = \cosh\left(\frac{a\Delta\tau}{2c}\right) - 1.$$

Dans notre cas, $D = 8$ a.l., $\Delta\tau = 8$ ans et $c = 1$ a.l./an. En posant

$$\xi = \frac{a}{2c},$$

on trouve bien l'équation :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1.$$

Et on en déduit :

$$a = 2c\xi \approx 0.404\ \mathrm{c/an} \approx 3.84\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi_{1/2} = 8\xi \approx 1.616$$

3.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre ? Exprimez Δt en fonction de c, a et $\varphi_{1/2}$. Application numérique.

On donne : $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1} \simeq 9.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, et $\sinh(1.616) \simeq 2.417$.

On repart de l'expression trouvée pour $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On intègre :

$$\Delta t = \frac{2c}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2c}{a}\sinh\varphi_{1/2}.$$

Ce qui donne numériquement :

$$\Delta t \approx 12\text{ ans}.$$

On étudie maintenant les conditions mécaniques de réalisation de ce voyage. Le vaisseau est pourvu de moteurs de propulsion photonique [1] qui accélèrent le vaisseau en éjectant des photons.

3.9 — Pour chaque photon d'énergie $h\nu$ éjecté du moteur, quelle est la quantité de mouvement associée que porte le photon ? Déduisez-en la quantité de mouvement associée à l'éjection d'une quantité $\mathrm{d}\varepsilon$ d'énergie sous forme de photons, en fonction de $\mathrm{d}\varepsilon$.

Chaque photon d'énergie $E = h\nu$ possède une quantité de mouvement $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ avec $k = 2\pi/\lambda$; on a donc

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad \text{et, en norme} \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$$

Pour une quantité d'énergie $\mathrm{d}\varepsilon$ éjectée sous forme de photons, la quantité de mouvement associée est donc simplement $\mathrm{d}p = \mathrm{d}\varepsilon/c$.

On souhaite établir la masse de carburant (pour notre hypothétique propulseur photonique) nécessaire pour pouvoir réaliser ce voyage.

Pour cela on se place dans le référentiel inertiel tangent $\mathcal{R}'$ où, en un événement donné quelconque de la trajectoire du vaisseau, celui-ci a une masse m et une vitesse u' nulle. Après avoir éjecté une quantité d'énergie $\mathrm{d}\varepsilon$ sous forme de photons qui sortent du propulseur, le vaisseau a une masse $m + \mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m < 0$) et une vitesse $u' = \mathrm{d}v'$.

3.10 — Quelles relations le principe de conservation de la quadri-impulsion totale permet-il de trouver entre $\mathrm{d}v'$, $\mathrm{d}\varepsilon$, $\mathrm{d}m$ et m ?

À un instant donné t, en un événement donné de la trajectoire du vaisseau, on construit comme précédemment le référentiel tangent $\mathcal{R}'$: dans ce référentiel, à cet instant, la masse du vaisseau est m et sa vitesse est nulle.

À l'instant suivant $t + \mathrm{d}t$ ($t' + \mathrm{d}t'$ dans $\mathcal{R}'$), le vaisseau a éjecté une certaine quantité d'énergie $\mathrm{d}\varepsilon$ (dans $\mathcal{R}'$) sous forme de photons émis vers l'arrière (attention : ces photons sont émis vers l'avant pendant la seconde moitié du voyage). Dans $\mathcal{R}'$ le vaisseau possède désormais une vitesse $\mathrm{d}v'$ et une masse $m + \mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m < 0$).

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion de l'ensemble du système (vaisseau à l'instant t, vaisseau plus photons éjectés à l'instant $t' + \mathrm{d}t'$) s'écrit :

$$\begin{aligned} E' = mc^2 &= \mathrm{d}\varepsilon + \gamma(\mathrm{d}v')(m + \mathrm{d}m)c^2 \\ \mathbf{p}' = \mathbf{0} &= -\alpha\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{c}\,\mathbf{e}_{\mathbf{x}'} + \gamma(\mathrm{d}v')(m + \mathrm{d}m)\,\mathrm{d}v'\,\mathbf{e}_{\mathbf{x}'} \end{aligned}$$

1. La propulsion photonique est encore à inventer... à vous de jouer !

où $\alpha = +1$ pendant la première moitié du voyage (photons émis vers l'arrière) et $\alpha = -1$ pendant la seconde moitié (photons éjectés vers l'avant).

En développant $\gamma(\mathrm{d}v')$ et en négligeant les termes de second ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} mc^2 &= mc^2 + \mathrm{d}\varepsilon + \mathrm{d}mc^2 \\ 0 &= -\alpha\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{c} + m\mathrm{d}v' \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mathrm{d}\varepsilon = -\mathrm{d}m\, c^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}v' = \alpha\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{mc} = -\alpha c\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

3.11 — Quelle valeur de l'accroissement $\mathrm{d}v$ en déduit-on pour la vitesse v du vaisseau, dans le repère inertiel terrestre, en fonction de m, $\mathrm{d}m$ et c ?

Le résultat précédent peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{d}v' = -\alpha c\,\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

Par ailleurs, on a établi précédemment la relation entre $\mathrm{d}v'$ et $\mathrm{d}v$:

$$\mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v.$$

on en déduit :

$$\gamma^2(v)\,\mathrm{d}v = -\alpha c\,\frac{\mathrm{d}m}{m} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}v = -\alpha c\,\frac{\mathrm{d}m}{m}\,\frac{1}{\gamma^2(v)}$$

3.12 — En déduire la masse finale $m(\Delta\tau)$ au terme du voyage, en fonction de la masse $m(0)$ au départ et de la rapidité à mi-chemin $\varphi_{1/2}$.

***Attention : les propulseurs s'inversent à mi-parcours : les photons sont projetés vers l'arrière pendant la première moitié du voyage, et vers l'avant pendant la seconde moitié*.**

En supposant ce voyage techniquement réalisable, quelle masse $m(0)$ le vaisseau doit-il avoir au départ pour acheminer $m(\Delta\tau) = 1$ tonne jusqu'à destination ? Application numérique.

On donne : $e^{1.616} \simeq 5$.

À partir du résultat précédent, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\alpha\gamma^2(v)\frac{\mathrm{d}v}{c} = -\alpha\mathrm{d}\varphi$$

en faisant apparaître la rapidité φ et en utilisant $\mathrm{d}v = c\,\mathrm{d}\varphi/\cosh^2\varphi$ (et le fait que $\alpha = \pm 1$ d'où $\alpha = 1/\alpha$).

En intégrant cette équation sur le parcours, on trouve :

$$\int_O^F \frac{\mathrm{d}m}{m} = \int_O^F -\alpha\mathrm{d}\varphi$$

Soit, en prenant en compte le fait que α change de signe à mi-parcours,

$$\begin{aligned}
\int_O^F \frac{\mathrm{d}m}{m} &= \int_O^M -\alpha \mathrm{d}\varphi + \int_M^F -\alpha \mathrm{d}\varphi \\
\ln m_F - \ln m_O &= -\int_O^M \mathrm{d}\varphi + \int_M^F \mathrm{d}\varphi \\
\ln \frac{m_F}{m_O} &= -2\varphi(M) = -2\varphi_{1/2}
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, la masse finale du vaisseau s'écrit :

$$m(\Delta\tau) = m_F = m_O \times e^{-2\varphi(M)} \qquad \text{où} \qquad \varphi(M) = \varphi_{1/2} = \operatorname{argtanh} \frac{v_M}{c} = \operatorname{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2} + 1\right] = 8\xi.$$

Numériquement, on obtient :

$$\varphi(M) = 8\xi \approx 1.616 \qquad \text{et} \qquad m(\Delta\tau) = m_F = m_O \times e^{-2\varphi(M)} \approx m_O/25$$

Pour emporter une tonne de charge utile jusqu'au système stellaire de destination, le vaisseau doit peser 25 tonnes au départ de la Terre : la quasi-totalité de la charge du vaisseau étant constitué du "carburant"...

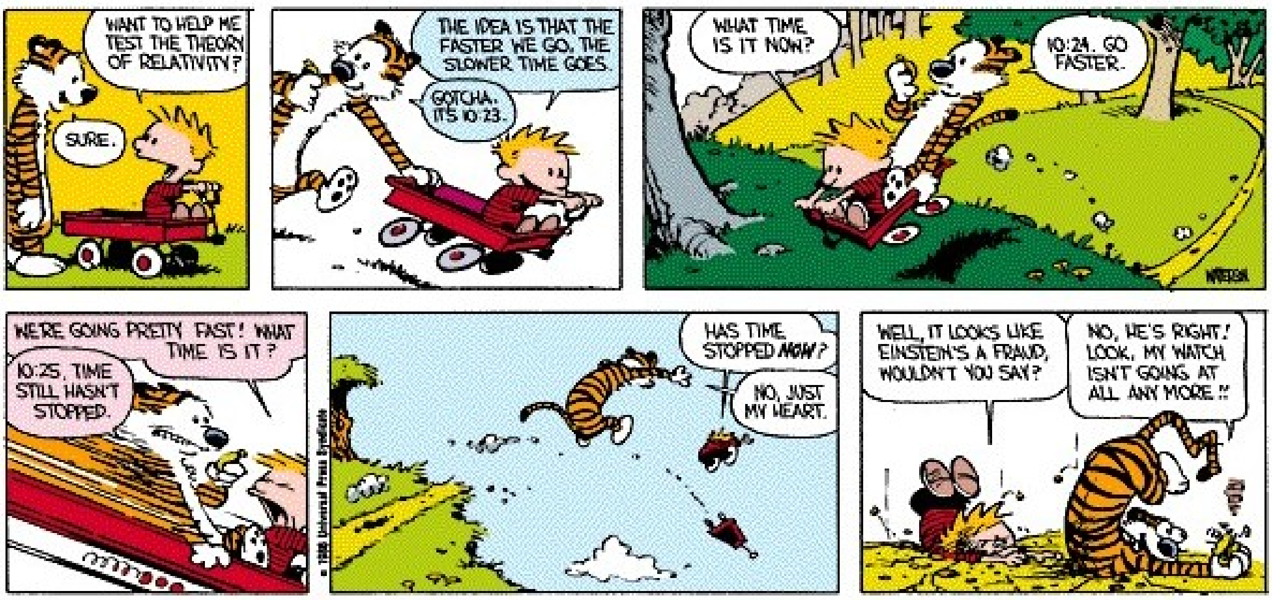


FIGURE 2 – *Calvin & Hobbes*, Bill Waterson.

4. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

4.1 — Question de cours : à partir de l'équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En partant de sa forme covariante, on explicite l'équation en faisant varier l'indice ν de 0 à 3.

Pour $\nu = 0$, on obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où on reconnaît l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Explicitons maintenant l'équation sous forme covariante pour $\nu = 1$. On obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 = \mu_0 j_x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j_x \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

où on reconnaît la composante selon x de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En faisant de même pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

4.2 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes contravariantes p^μ et covariantes p_μ.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

4.3 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\widetilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie E de la particule et de sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$.

$\widetilde{\mathbf{f}}$ est la dérivée d'un quadrivecteur par rapport au temps propre τ, qui est un invariant de Lorentz : ses composantes se transforment donc bien selon Lorentz, et $\widetilde{\mathbf{f}}$ possède bien les propriétés d'un quadrivecteur.

On a donc :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

Pour les composantes contravariantes, cela donne :

$$f^\mu = \gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

D'où

$$f^\mu = \left(\gamma(u)\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(u)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

4.4 — Montrez que pour une particule de quadrivitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ subissant une quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}}$, on a $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$. Déduisez-en que :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\gamma(u)m\mathbf{u}\right)}{\mathrm{d}t}$$

Le quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ vérifie :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}^2}{\mathrm{d}\tau} = 2\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0$$

Or, le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ peut encore s'écrire :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} \qquad \text{d'où} \qquad \widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$$

Si on explicite cette dernière relation avec les composantes f^μ et U_μ, on trouve :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = \gamma^2(u)\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u}\right] = 0$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

On retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'une particule par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x$.

4.5 — Donnez explicitement $F^{\mu\nu}$ dans la région de l'espace où $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x$.

Dans le référentiel du laboratoire, les composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$ du tenseur du champ électromagnétique se réduisent à :

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une particule de charge q placé dans le champ : on note $\widetilde{\mathbf{r}}$ sa position, $\mathbf{u}$ son vecteur vitesse et $\widetilde{\mathbf{U}}$ sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadriforce de Lorentz $\widetilde{\mathbf{f}}$ qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu}U_\nu. \tag{1}$$

4.6 — Rappelez l'expression des composantes contravariantes U^μ et covariantes U_μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$.

Le quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Et ses composantes covariantes sont :

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ -\gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

4.7 — À partir de l'équation (1), donnez explicitement les composantes f^0, f^1, f^2 et f^3 du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{f}}$.

Les composantes contravariantes f^μ du quadrivecteur force de Lorentz $\widetilde{\mathbf{f}}$ vérifient :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu \, U^\nu = qF^{\mu\nu} \, U_\nu .$$

Écrivons explicitement chaque composante. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
f^0 &= qF^{00}\,U_0 + qF^{01}\,U_1 + qF^{02}\,U_2 + qF^{03}\,U_3 = \gamma(u)qE_x\frac{u_x}{c} \\
f^1 &= qF^{10}\,U_0 + qF^{11}\,U_1 + qF^{12}\,U_2 + qF^{13}\,U_3 = \gamma(u)qE_x \\
f^2 &= qF^{20}\,U_0 + qF^{21}\,U_1 + qF^{22}\,U_2 + qF^{23}\,U_3 = 0 \\
f^3 &= qF^{30}\,U_0 + qF^{31}\,U_1 + qF^{32}\,U_2 + qF^{33}\,U_3 = 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x\,\frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x\mathbf{e}_x\right)$$

4.8 — Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie E et la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x = a\,\mathbf{e}_x \qquad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

D'après la question précédente, la force de Lorentz s'écrit ici :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x\,\frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x\mathbf{e}_x\right)$$

Or, on a par ailleurs :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

En identifiant, on trouve immédiatement :

$$qE_x \frac{u_x}{c} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x.$$

4.9 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Déduisez-en l'expression de la vitesse u en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité φ).

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, vers quelle valeur tend u ? Comparez avec le cas classique.

À partir de l'équation précédente,

$$\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

Ce qui donne, en intégrant,

$$\gamma(u)\mathbf{u} = \gamma(u(t=0))\mathbf{u}(t=0) + \int_0^t \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = \frac{qE_x t}{m}\,\mathbf{e}_x$$

La vitesse $\mathbf{u}$ est par conséquent selon $\mathbf{e}_x$: $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$. En remplaçant $\gamma(u)$ par son expression,

$$\frac{u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE_x t}{m} = at$$

en posant $a = qE_x/m$. Ce qui donne :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$$

Pour de grandes valeurs de t, autrement dit au bout d'un temps assez long, la vitesse de la particule accélérée tend vers c :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2t^2}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} c$$

Dans le traitement classique de ce phénomène, l'accélération de la particule serait $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = qE_x/m = a$, et on obtiendrait une trajectoire rectiligne uniformément accélérée :

$$u = at = \frac{qE_x}{m}\,t \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1}{2}\,at^2$$

La description classique n'interdit donc pas à la particule d'atteindre au bout d'un temps $t = c/a$ la vitesse de la lumière, puis de la dépasser. Le traitement relativiste du même problème physique interdit cela, en accord avec l'expérience.

4.10 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t. On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh}\beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

D'après ce qui précède, la vitesse $u(t)$ s'écrit :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}} = c \tanh\varphi$$

En se souvenant que $\gamma(u) = \cosh\varphi$ et que $\beta\gamma = \sinh\varphi$, on trouve :

$$\cosh\varphi = \gamma(u) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad \sinh\varphi = \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} = \frac{at}{c}$$

De l'équation différentielle précédente,

$$\mathrm{d}(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = a, \mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

on tire aussi une relation entre φ et t :

$$\mathrm{d}(\gamma(u)u) = c\,\mathrm{d}\left(\cosh\varphi\tanh\varphi\right) = a\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\left(\sinh\varphi\right) = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On peut désormais exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de φ :

$$\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}t = \frac{at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a}\,\frac{\sinh\varphi\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

D'où on déduit, en intégrant le long de la trajectoire :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mathrm{d}x = \frac{c^2}{a}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c^2}{a}\left[\cosh\varphi(t) - 1\right] = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right].$$

Ce qui donne :

$$\widetilde{\mathbf{r}}(t) : r^\mu(t) = \left(ct, \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right], 0, 0\right)$$

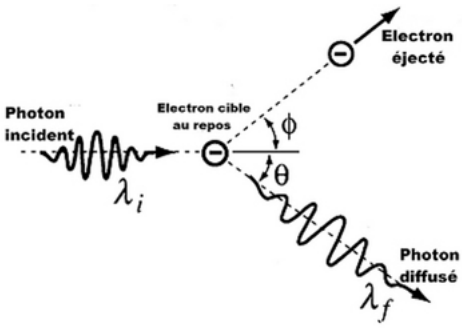
Lorsque $at \ll c$, on retrouve le résultat classique :

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right] \simeq \frac{c^2}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2}at^2$$

5. Effet Compton et effet Compton inverse

En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde $\Delta\lambda$ dépend de l'angle de diffusion θ. Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste ; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.

5.1 — On considère la collision d'un photon d'énergie $h\nu_i$ avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez sous forme quadrivectorielle la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire. On notera respectivement $\widetilde{\mathbf{p}}$ et $\widetilde{\mathbf{q}}$ les quadri-impulsions de l'électron et du photon avant la diffusion, et $\widetilde{\mathbf{p}}'$ et $\widetilde{\mathbf{q}}'$ leurs quadri-impulsions après la diffusion.



Déduisez-en le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$ du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion θ.

On appelle respectivement ν_i et ν_f les fréquences du photon incident et du photon diffusé, $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{k}_f$ leurs vecteurs d'onde. Dans le référentiel du laboratoire (où l'électron est initialement immobile), les quadrivecteurs impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ de l'électron et $\widetilde{\mathbf{q}}$ du photon s'écrivent :

$$\widetilde{\mathbf{p}} : p^\mu = (m_e c, \mathbf{0}) \qquad \widetilde{\mathbf{q}} : q^\mu = \left(\frac{h\nu_i}{c}, \hbar\,\mathbf{k}_i\right)$$

Après la diffusion, l'électron possède une énergie E' et une impulsion $\mathbf{p}'$. Les quadri-impulsions $\widetilde{\mathbf{p}}'$ (électron) et $\widetilde{\mathbf{q}}'$ (photon) s'écrivent alors :

$$\widetilde{\mathbf{p}}' : p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{p}'\right) \qquad \widetilde{\mathbf{q}}' : q'^\mu = \left(\frac{h\nu_f}{c}, \hbar\,\mathbf{k}_f\right)$$

La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'exprime simplement par l'égalité :

$$\widetilde{\mathbf{p}} + \widetilde{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{p}}' + \widetilde{\mathbf{q}}' \tag{2}$$

L'équation précédente (2) permet de trouver le décalage en longueur d'onde de manière très élégante. On peut la réécrire en isolant le quadrivecteur associé à l'électron après l'interaction, puis élever au carré l'équation obtenue pour éliminer à la fois E' et $\mathbf{p}'$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{p}}' &= \widetilde{\mathbf{p}} + \widetilde{\mathbf{q}} - \widetilde{\mathbf{q}}' \\
\widetilde{\mathbf{p}}'^2 &= (\widetilde{\mathbf{p}} + \widetilde{\mathbf{q}} - \widetilde{\mathbf{q}}')^2 = \widetilde{\mathbf{p}}^2 + \widetilde{\mathbf{q}}^2 + \widetilde{\mathbf{q}}'^2 + 2\,\widetilde{\mathbf{p}}\cdot\widetilde{\mathbf{q}} - 2\,\widetilde{\mathbf{p}}\cdot\widetilde{\mathbf{q}}' - 2\,\widetilde{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{q}}'
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = \widetilde{\mathbf{p}}'^2 = m_e^2 c^2$, et que par ailleurs , pour le photon, $\widetilde{\mathbf{q}}^2 = \widetilde{\mathbf{q}}'^2 = 0$, on obtient :

$$m_e h(\nu_i - \nu_f) = \frac{h^2 \nu_i \nu_f}{c^2} - \hbar^2\,\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f$$

Par ailleurs, pour un photon, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$, ce qui donne :

$$m_e(\nu_i - \nu_f) = \frac{h}{c^2}\,\nu_i\nu_f\,(1 - \cos\theta)$$

Où θ est l'angle entre les directions du photon incident et du photon diffusé. En divisant par $\nu_i\nu_f$ et en faisant apparaître les longueurs d'o nde λ_i et λ_f, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\nu_f} - \frac{c}{\nu_i} &= \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\theta) \\
\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i &= \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

5.2 — Le processus inverse de l'effet Compton, baptisé diffusion Compton inverse, se produit lorsque des électrons très énergétiques sont freinés par les photons du milieu. Ce phénomène est observé en astrophysique, par exemple lorsque les photons du rayonnement fossile micro-onde interagissent avec les électrons très énergétiques du gaz chaud d'un amas de galaxies (effet Sunyaev-Zel'dovich).

Montrez que dans ce cas, le photon diffusé *gagne de l'énergie* aux dépens de l'électron (astuce : reprendre le calcul précédent en se plaçant dans le *référentiel de l'électron après la collision*).

D'un point de vue formel, le processus est en fait exactement le même que pour l'effet Compton, il ne s'agit que d'un changement de référentiel. La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit comme précédemment :

$$\widetilde{\mathbf{p}} + \widetilde{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{p}}' + \widetilde{\mathbf{q}}' \tag{3}$$

Qu'on peut réécrire afin d'éliminer E et $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{p}} &= \widetilde{\mathbf{p}}' - \widetilde{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{q}}' \\
\widetilde{\mathbf{p}}^2 &= (\widetilde{\mathbf{p}}' - \widetilde{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{q}}')^2 = \widetilde{\mathbf{p}}'^2 + \widetilde{\mathbf{q}}^2 + \widetilde{\mathbf{q}}'^2 - 2\,\widetilde{\mathbf{p}}' \cdot \widetilde{\mathbf{q}} + 2\,\widetilde{\mathbf{p}}' \cdot \widetilde{\mathbf{q}}' - 2\,\widetilde{\mathbf{q}} \cdot \widetilde{\mathbf{q}}'
\end{aligned}$$

En se plaçant dans le référentiel de l'électron **après** la collision, on a cette fois, dans ce référentiel, avant la collision :

$$\widetilde{\mathbf{p}} : p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \qquad \widetilde{\mathbf{q}} : q^\mu \left(\frac{h\nu_i}{c}, \hbar\,\mathbf{k}_i\right)$$

Après la diffusion, l'électron possède une énergie $m_e c^2$ et une impulsion nulle. Les quadri-impulsions $\widetilde{\mathbf{p}}'$ (électron) et $\widetilde{\mathbf{q}}'$ (photon) s'écrivent alors :

$$\widetilde{\mathbf{p}}' : p'^\mu = (m_e c, \mathbf{0}) \qquad \widetilde{\mathbf{q}}' : q'^\mu = \left(\frac{h\nu_f}{c}, \hbar\,\mathbf{k}_f\right)$$

Le calcul est analogue, et on trouve cette fois :

$$\begin{aligned}
m_e h(\nu_i - \nu_f) &= -\frac{h^2 \nu_i \nu_f}{c^2} + \hbar^2\,\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f \\
m_e(\nu_i - \nu_f) &= \frac{h}{c^2}\,\nu_i \nu_f\,(\cos\theta - 1) \\
\frac{c}{\nu_f} - \frac{c}{\nu_i} &= \frac{h}{m_e c}\,(\cos\theta - 1) \\
\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i &= \frac{h}{m_e c}\,(\cos\theta - 1) < 0
\end{aligned}$$

Dans le référentiel de l'électron après la collision, la longueur d'onde du photon diffusé est inférieure à la longueur d'onde du photon incident : le photon a donc **gagné** de l'énergie aux dépens de l'électron.