Parcours PHYTEM

Abrégé de Relativité Restreinte

Année Universitaire 2017–2018

Intervenants : L. Le Guillou, J. Bolmont

1. De Galilée (*Galileo Galilei*, 1564–1642) à Einstein (1879-1955)

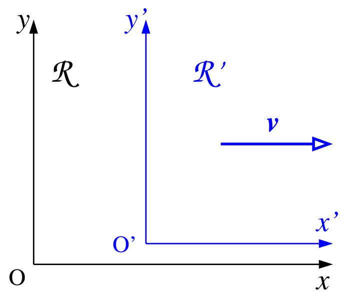
Le principe de relativité. Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel). Par exemple, le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous une forme invariante dans deux référentiels galiléens quelconques $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\mathcal{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F'} = m\mathbf{a'} \quad (\mathcal{R}')$$

Changement de référentiel galiléen : transformations spéciales. En mécanique classique, le passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ s'effectue par la transformation suivante (dite *de Galilée*) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x - vt \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array}\right. \qquad \text{et réciproquement} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x' + vt' \\ y &=& y' \\ z &=& z' \end{array}\right.$$

On se place ici dans le cas particulier où les axes des deux repères sont parallèles, et où les axes (Ox) et $(O'x')$ sont choisis parallèlement à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. On suppose aussi que $t = t'$ (temps universel) et que $t = t' = 0$ quand les origines O et O' se confondent.



Si on appelle $\mathbf{u}$ (respectivement $\mathbf{u'}$) la vitesse d'un mobile mesurée dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$), la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\mathbf{u'} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v'}$$

Limites de la mécanique classique galiléenne. La mécanique classique prédit que la vitesse apparente d'un rayon lumineux doit changer selon le référentiel de l'observateur : $c' = c + v$ ou $c' = c - v$ selon que l'observateur s'approche ou s'éloigne de la source. D'où le concept d'**éther** comme référentiel privilégié où les ondes lumineuses se propagent à la vitesse c prédite par les équations de Maxwell, les équations de Maxwell n'étant pas invariantes par une transformation de Galilée.

Expérimentalement : la vitesse de la lumière vaut toujours c, quel que soit le référentiel inertiel considéré, et le *vent d'éther* n'a jamais pu être mis en évidence : expériences de Fizeau (1851), de Michelson et Morley (1881, souvent répétée et améliorée depuis), *etc*...

Solution : la relativité restreinte. Plusieurs physiciens théoriciens (Lorentz, Poincaré) proposent des solutions formelles *ad hoc* pour réconcilier mécanique classique et électromagnétisme, sans toutefois en tirer toutes les conséquences physiques. A. Einstein propose en 1905 de reconstruire les lois de la mécanique à partir de deux postulats :

1. **Principe de relativité** : les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen ;
2. **La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels** : la vitesse de la lumière c est invariante par changement de référentiel.

À partir de ces postulats, on trouve les nouvelles équations de changement de référentiel (formulées par Lorentz et Poincaré), et on construit un nouvel ensemble de lois mécaniques baptisé ***relativité restreinte*** (*special relativity*).

2. Les transformations de Lorentz

À partir des postulats choisis, on montre que le temps n'est pas invariant par changement de référentiel, et que les concepts de temps universel, de longueur invariante, de simultanéité ne sont plus des concepts valides. Les coordonnées d'espace et de temps se *mélangent*, et il est nécessaire de raisonner sur des **événements**, c'est à dire des points dans l'espace-temps repérés par des coordonnées spatiales $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et temporelle t.

Transformations spéciales de Lorentz. Il s'agit du cas particulier où les axes (Ox) et $(O'x')$ des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont choisis parallèles à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ des deux référentiels (On pourrait raisonner de même en choisissant plutôt les axes $(Oy)/(Oy')$ ou $(Oz)/(Oz')$).

On montre que, lorsqu'on passe du référentiel inertiel $\mathcal{R}$ au référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, les coordonnées d'un **événement** M se transforment selon :

$$\left\{\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{\begin{aligned} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right.$$

où on pose en général :

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou vectoriellement} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Avec la convention suivante : les origines O et O' se confondent à $t = t' = 0$.

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Forme générale des transformations de Lorentz. Si on se place dans le cas plus général où la vitesse relative $\mathbf{v}$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ n'est pas parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$, les équations des transformations de Lorentz peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} ct' & = \gamma \left(ct - \dfrac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r'} & = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \dfrac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t \end{array} \right.$$

Ces équations se réduisent au cas précédent quand $\mathbf{v}$ est parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$.

3. Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs

Les transformations de Lorentz ont de nombreuses conséquences pratiques assez surprenantes et contre-intuitives. Le temps n'est plus universel : il s'écoule différemment selon le référentiel considéré. Le concept de simultanéité devient relatif. La synchronisation des horloges dans un référentiel donné nécessite d'élaborer un protocole d'échanges de signaux lumineux (car c est constante et universelle).

Intervalle d'espace-temps. Pour deux événements E_1 et E_2 séparés par $(\Delta t, \Delta x)$ dans $\mathcal{R}$ et respectivement $(\Delta t', \Delta x')$ dans $\mathcal{R}'$, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c\Delta t' & = \gamma \left(c\Delta t - \beta \Delta x \right) \\ \Delta x' & = \gamma \left(\Delta x - \beta c \Delta t \right) \end{array} \right.$$

La distance Δx comme l'intervalle de temps Δt séparant ces événements ne sont pas conservés par changement de référentiel. Par contre, l'intervalle d'espace-temps Δs^2 est invariant :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

Dilatation du temps. Temps propre. Pour deux événements se produisant au même point dans $\mathcal{R}'$, on aura $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = 0$, et donc $\Delta x = \beta c \Delta t = vt$. L'intervalle de temps $\Delta t'$ vaut ainsi :

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \Delta x) = \gamma(1 - \beta^2) c \Delta t = \frac{1}{\gamma} c \Delta t \qquad \text{d'où} \qquad \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Pour un observateur, le temps $\Delta\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\Delta t = \gamma \Delta \tau > \Delta \tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2$.

Contraction des longueurs. Longueur propre. La mesure d'une longueur, par exemple à l'aide d'une règle immobile dans le référentiel de l'observateur, consiste *par définition* en une lecture simultanée de la position des extrémités de l'objet à mesurer. On montre de la même manière que dans tout autre référentiel galiléen, un objet en mouvement de **longueur propre** L_0 apparaît contracté dans le référentiel d'un observateur se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'objet : la longueur apparente est $L = L_0/\gamma < L_0$.

Equivalence des référentiels inertiels. Conséquence davantage contre-intuitive : comme les référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont équivalents, les observateurs dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ font les mêmes observations (dilatation du temps, contraction des longueurs) pour l'autre référentiel, et ce, sans contradiction. Il s'agit d'un phénomène de "*perspective dans l'espace-temps*".

Composition des vitesses. À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \end{cases}$$

Il apparaît clairement que :

- Les composantes transverses u_y et u_z de la vitesse ne sont pas invariantes.
- Le vecteur vitesse ne se transforme pas comme le vecteur position selon les équations des transformations de Lorentz (voir plus loin le quadrivecteur vitesse).

Rapidité. Plutôt que la vitesse, une grandeur utile en relativité restreinte est la rapidité φ, définie par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh\varphi \qquad \varphi = \operatorname{argtanh}\beta = \operatorname{argtanh}\frac{v}{c}$$

La rapidité est une grandeur additive lors d'un changement de référentiel, ce qui simplifie notamment le traitement des mouvements accélérés.

On a les relations suivantes, très pratiques :

$$\beta = \tanh\varphi \qquad \gamma = \cosh\varphi \qquad \beta\gamma = \sinh\varphi$$

4. Espace de Minkowski, diagrammes d'espace-temps

Pour raisonner dans le cadre contre-intuitif de la relativité restreinte, on peut considérer que les événements ont lieu dans un "continuum espace-temps" à 4 dimensions doté d'une pseudo-métrique, que l'on appelle "espace de Minkowski". Dans cet espace, un point représente un événement ; la position occupée par un objet ponctuel au fil du temps est sa "ligne d'Univers" $\widetilde{\mathbf{r}}(\tau)$; le "volume d'espace-temps" occupé par un objet non-ponctuel constitue son "tube d'univers", *etc* (fig. 1). Un changement de référentiel, représenté par une transformation de Lorentz, correspond à une rotation dans l'espace de Minkowski.

Dans le même esprit, on peut construire des "diagrammes d'espace-temps" pour mieux comprendre les effets d'un changement de référentiel (fig. 1). Selon les conventions adoptées, il faut être vigilant sur la graduation des axes qui pourra être différente selon le référentiel.

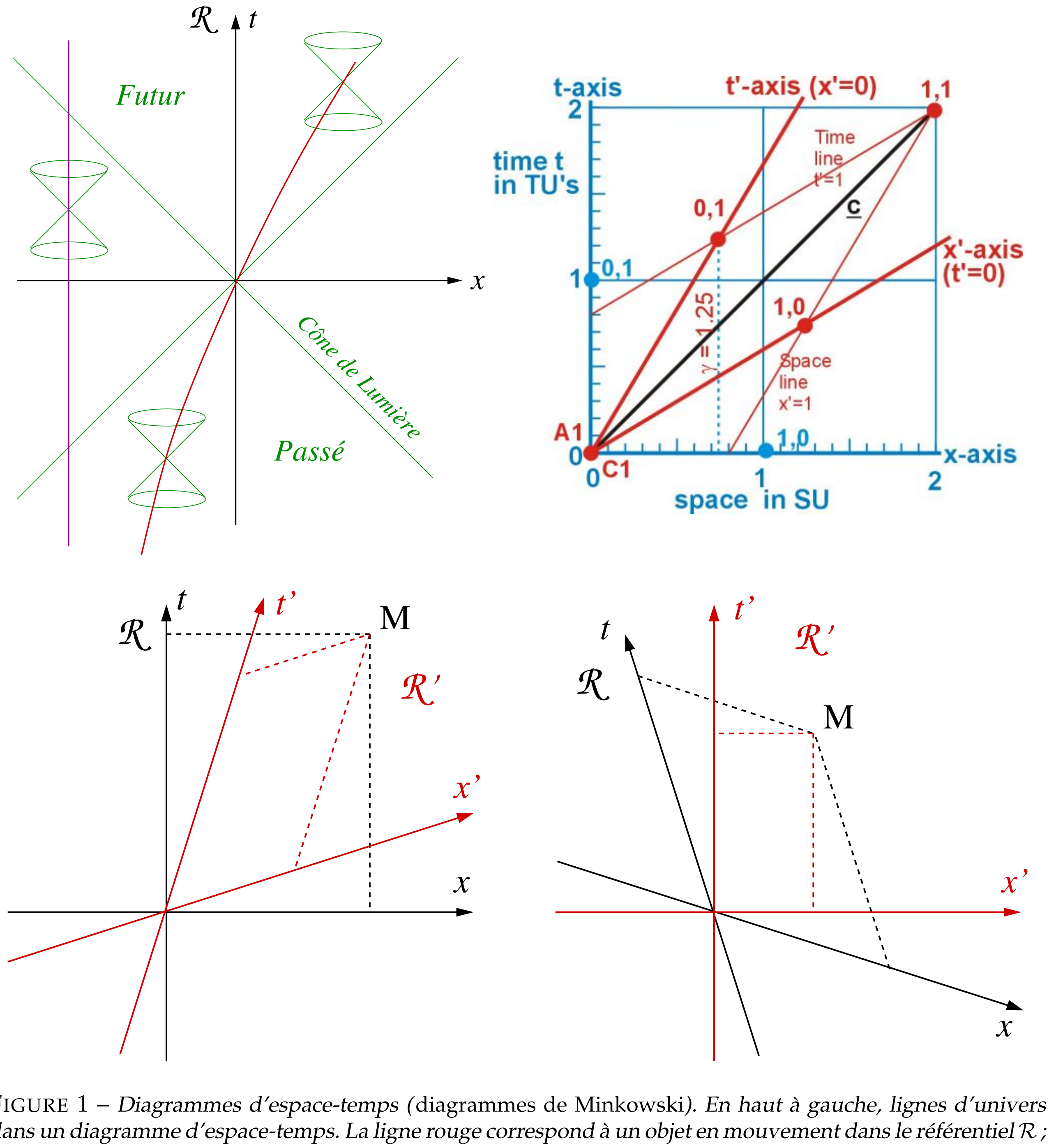


FIGURE 1 – *Diagrammes d'espace-temps* (diagrammes de Minkowski)*. En haut à gauche, lignes d'univers dans un diagramme d'espace-temps. La ligne rouge correspond à un objet en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$; la ligne violette à un objet immobile dans $\mathcal{R}$. Le cône de lumière du point origine est représenté, avec le passé et le futur de ce point-événement. Pour chaque point-événement d'une ligne d'univers, tous les points passés et futurs de la ligne d'univers sont inclus dans les cônes respectifs du passé et du futur de ce point. En bas, points de vue respectifs de l'observateur dans le référentiel $\mathcal{R}$ (à gauche) et de l'observateur dans $\mathcal{R}'$ (à droite). La figure supérieure droite montre que, dans ces diagrammes, les graduations des axes ne sont pas semblables pour les deux référentiels. On peut aussi construire des diagrammes symétriques qui ne privilégient aucun des deux référentiels.*

5. Quadrivecteurs, tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

5.1. Quadrivecteurs

Les équations de changement de référentiel de la relativité restreinte conduisent naturellement à utiliser un objet mathématique baptisé ***quadrivecteur*** (*four-vector*), dont les composantes se transforment selon les équations des transformations de Lorentz (on parlera de composantes *contravariantes*, ce qui sera précisé plus loin). L'objectif est ensuite d'écrire les lois de la physique dans ce formalisme quadrivectoriel, pour obtenir des relations invariantes de Lorentz, *i.e.* indépendantes du choix du référentiel inertiel (selon la même démarche qu'en mécanique classique avec le formalisme vectoriel).

Un quadrivecteur quelconque $\widetilde{\mathbf{A}}$ possède ainsi une composante temporelle $A^0 = A^t$, et une composante spatiale $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = (A^x, A^y, A^z)$. Ces composantes se transforment selon les transformations de Lorentz lors d'un changement de référentiel :

$$\mathcal{R} \to \mathcal{R}' \qquad A'^{\mu} = \sum_{\nu} [\mathbf{L}]^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu} = [\mathbf{L}]^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu} \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace des quadrivecteurs d'un *pseudo-produit scalaire* et d'une *pseudo-norme* qui sont des scalaires invariants. Pour deux quadrivecteurs quelconques $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, on aura ainsi :

$$\text{Le pseudo-produit scalaire} \quad \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = \sum_{\mu=0\ldots3} \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}$$

$$\text{La pseudo-norme (carrée)} \quad \widetilde{\mathbf{A}}^2 = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}} = (A^0)^2 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \sum_{\mu=0\ldots3} \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$$

Avec $\eta_{\mu\nu}$ la *métrique* de l'espace de Minkovski [1] :

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} \qquad \text{où} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On emploie ici la convention dite *convention de sommation d'Einstein*, où une sommation sur toutes les valeurs possibles d'un indice est implicite chaque fois qu'un indice est répété ; ainsi, par exemple :

$$\widetilde{\mathbf{r}}^2 = \eta_{\mu\nu} r^{\mu} r^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} r^{\mu} r^{\nu}$$

On peut construire un quadrivecteur à partir d'autres quadrivecteurs et de grandeurs scalaires invariantes de Lorentz (célérité c, temps propre τ, masse propre m, pseudo-norme, *etc.*). On construira ainsi les quadrivecteurs position $\widetilde{\mathbf{r}}$, la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$, la quadri-accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$, la quadri-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$, *etc.*

1. On utilise dans ce cours la signature $(+, -, -, -)$: dans l'expression de la pseudo-norme, le temps est compté positivement et l'espace négativement. Selon les ouvrages, on peut aussi trouver la convention inverse $(-, +, +, +)$. Les deux conventions sont bien évidemment équivalentes.

Le quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$: (noté aussi $\widetilde{\mathbf{x}}$: x^μ), dont les composantes contravariantes sont :

$$\widetilde{\mathbf{r}} : r^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \quad \text{sa pseudo-norme carrée est} \quad \widetilde{\mathbf{r}}^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = (r^0)^2 - (r^1)^2 - (r^2)^2 - (r^3)^2.$$

De plus, $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}r^\mu \mathrm{d}r^\nu = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathbf{dr}^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$ où $\mathrm{d}\tau$ est l'intervalle élémentaire de temps propre de l'objet de trajectoire $\widetilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

La quadri-vitesse ou quadrivecteur vitesse :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{Sa pseudo-norme carrée est} \quad \widetilde{\mathbf{U}}^2 = \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2.$$

La quadri-accélération ou quadrivecteur accélération :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u)\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\,\mathbf{u} + \gamma^2(u)\,\dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Sa pseudo-norme carrée est $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$ où $\mathbf{a}$ est l'accélération propre (mesurée dans le référentiel propre de l'objet).

5.2. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

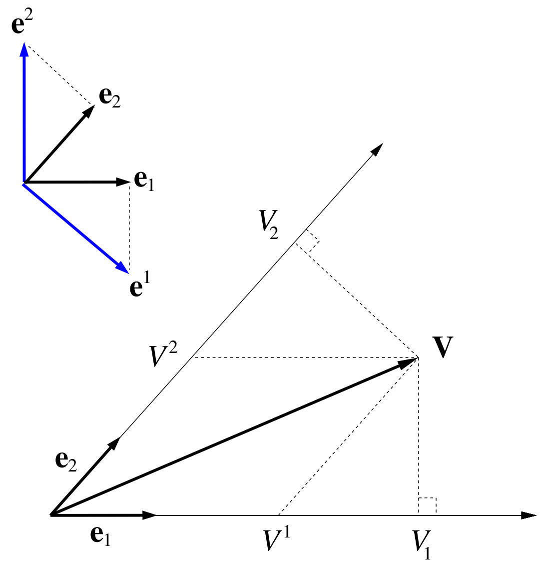
Le formalisme quadrivectoriel peut être étendu et généralisé grâce au concept de *tenseur* : les grandeurs physiques sont représentées par des quadritenseurs (*four-tensor*), de telle sorte que, par construction, écrire les équations de la physique sous forme tensorielle assure leur invariance par changement de référentiel : on parle de "formalisme manifestement covariant" et d'équations "covariantes".

Tenseurs. Un quadritenseur (*4-tensor*) de rang n possède 4^n composantes qui se transforment linéairement par changement de référentiel. Ansi, un scalaire invariant de Lorentz est un tenseur de rang 0 (par exemple, c, m, la pseudo-norme...). Un quadrivecteur est un tenseur de rang 1 et possède 4 composantes dans l'espace de Minkovski : c'est le cas des quadrivecteurs position, vitesse, accélération, énergie-impulsion, *etc*. Un tenseur de rang 2 possède $4 \times 4 = 16$ composantes : le tenseur du champ électromagnétique $\widetilde{\mathbf{F}}$ de composantes $F^{\mu\nu}$ en est un exemple. On construit de même des tenseurs de rang 3, 4, *etc*.

Dans le formalisme relativiste, on adopte souvent la convention suivante : un indice grec prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3 et désigne une composante quelconque du quadrivecteur ou du quadritenseur tandis qu'un indice latin ne prend que les valeurs 1, 2 ou 3 et correspond aux composantes x, y, z de l'espace.

Composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur. Métrique. De manière générale, dans une base quelconque (non nécessairement orthonormée) $\{\mathbf{e}_i\}$, on peut exprimer les composantes d'un vecteur $\mathbf{V}$ de deux manières distinctes :

- En exprimant $\mathbf{V}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\mathbf{e}_\mu\}$: $\mathbf{V} = \sum V^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{e}_i$: les V^i sont les composantes *contravariantes* de $\mathbf{V}$;
- En projetant orthogonalement $\mathbf{V}$ sur les vecteurs de base : $V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i$, ce qui revient à développer $\mathbf{V}$ sur la base duale $\{\mathbf{e}^i\}$ définie par $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$. Les V_i sont les composantes *covariantes* de $\mathbf{V}$.



Composantes	Développement de $\mathbf{V}$	Projections
Contravariantes	$\mathbf{V} = \sum_i V^i \, \mathbf{e}_i = V^i \, \mathbf{e}_i$	$V^i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^i$
Covariantes	$\mathbf{V} = \sum_i V_i \, \mathbf{e}^i = V_i \, \mathbf{e}^i$	$V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i$

Dans le cas d'un espace euclidien muni d'un repère orthonormé, la base duale $\{\mathbf{e}^i\}$ se confond avec la base $\{\mathbf{e}_i\}$, et les composantes covariantes et contravariantes sont identiques. Ce n'est plus le cas dans l'espace de Minkovski : c'est pourquoi on distingue pour un quadrivecteur donné $\widetilde{\mathbf{A}}$ (et plus généralement pour un quadritenseur) ses composantes covariantes notées A_μ (indice inférieur), et ses composantes contravariantes notées A^μ (indice supérieur à ne pas confondre avec un exposant).

Vis à vis d'une transformation de Lorentz, les composantes contravariantes d'un quadritenseur se transforment selon les équations de Lorentz écrites précédemment :

$$A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu \, A^\nu \qquad \text{avec} \qquad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Tandis que les composantes covariantes se transforment selon la matrice inverse :

$$A'_\mu = \left[\bar{\mathbf{L}}\right]_\mu{}^\nu \, A_\nu \qquad \text{avec} \qquad \left[\bar{\mathbf{L}}\right]_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathbf{L}] \left[\bar{\mathbf{L}}\right] = \mathbf{1} \qquad \left[\bar{\mathbf{L}}\right]_\mu{}^\nu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Pour passer d'une composante covariante à une composante contravariante (et vice-versa), on utilise le tenseur métrique $\widetilde{\eta}$ de composantes $\eta^{\mu\nu}$:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \qquad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \qquad B_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} B^{\alpha\beta} \qquad B^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} B_{\alpha\beta}$$

On fait ainsi *monter un indice* en contractant le tenseur avec $\eta^{\mu\nu}$, et réciproquement *descendre un indice* en contractant avec $\eta_{\mu\nu}$. Dans l'espace de Minkovski,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et on aura} \quad \eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

Il est à noter que la relation $\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ (tenseur métrique invariant par changement de référentiel) n'est pas vraie en général dans un espace courbe.

Pour un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$, la pseudo-norme carrée peut ainsi s'écrire :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

La généralisation de ce formalisme (pour une métrique $g^{\mu\nu}$ quelconque, $\widetilde{\mathbf{g}}(r^\mu)$) permet de construire les lois de la mécanique dans un espace courbe. C'est dans ce cadre formel qu'Albert Einstein a élaboré avec succès une théorie *géométrique* des lois de la gravitation : la relativité générale (*general relativity*).

6. La dynamique relativiste

À partir du quadrivecteur vitesse, on peut construire un quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}} \qquad p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

Quadrivecteur force ou quadri-force. La deuxième loi de Newton possède un équivalent relativiste, exprimé avec des quadrivecteurs :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = m\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{A}} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \left(\gamma\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma\,\mathbf{f}\right)$$

Comme $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2$ est constant, on montre facilement que

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

Le cas particulier du photon. Pour le photon, dont la masse propre (masse au repos) est nulle, on peut construire un quadrivecteur d'onde $\widetilde{\mathbf{k}}$ et un quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ selon :

$$\widetilde{\mathbf{k}} : k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\nu}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathbf{p}} = \hbar\widetilde{\mathbf{k}} : p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \hbar\mathbf{k} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \hbar^2\mathbf{k}^2 = 0$$

Dynamique des réactions nucléaires et des collisions de particules. Dans une réaction nucléaire ou un processus de physique des particules (désintégration, collision, *etc.*), le quadrivecteur énergie-impulsion total du système est conservé :

$$\left[\sum_i \widetilde{\mathbf{p}}_i\right]_{\text{avant}} = \left[\sum_i \widetilde{\mathbf{p}}_i\right]_{\text{après}}$$

ce qui correspond à la conservation de l'énergie totale d'une part, et de l'impulsion totale d'autre part.

En pratique, pour analyser une réaction, on fait un usage intense du fait que, d'une part, le quadrivecteur énergie-impulsion est conservé, et que, d'autre part, les pseudo-produits scalaires de quadrivecteurs sont invariants par changement de référentiels : par exemple, $\widetilde{\mathbf{p}}^2$, $(\widetilde{\mathbf{p}}_1 + \widetilde{\mathbf{p}}_2)^2$, $\widetilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_2$, *etc.*

Référentiel du centre de masse. Pour tout objet ou système, il existe un référentiel particulier $\mathcal{R}^*$ où l'impulsion totale (c'est à dire la composante vectorielle $\mathbf{p}$ de $\widetilde{\mathbf{p}}_{\text{total}}$) du système s'annule : c'est le référentiel du "*centre de masse*", et dans ce référentiel,

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{\text{total}}^2 = \left[\sum_i \widetilde{\mathbf{p}}_i\right]^2 = (E^*/c)^2 = M^2c^2$$

où E^* est l'énergie totale du système dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, et M la ***masse invariante*** (*invariant mass*) du système considéré. La masse invariante M est un invariant de Lorentz : pour un système donné, sa valeur est indépendante du référentiel.

7. Le champ électromagnétique

Opérateur gradient. Les équations régissant le comportement du champ électromagnétique sont des équations différentielles faisant apparaître des dérivées partielles. Dans le formalisme tensoriel, on définit l'opérateur gradient (*four-gradient*) par ses composantes covariantes ∂_μ :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial r^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right)$$

Les composantes contravariantes ∂^μ s'obtiennent simplement par :

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right).$$

La contraction de l'opérateur gradient avec lui-même donne l'opérateur invariant de Lorentz $\Box$ qui n'est autre que le D'Alembertien :

$$\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2.$$

Quadrivecteur courant. Dans le cadre relativiste, on décrit à la fois la densité de charge ρ et la densité de courant $\mathbf{j}$ par un quadrivecteur courant (*four-current*) $\widetilde{\jmath}$: $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$. La conservation de la charge s'écrit alors simplement :

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$$

Tenseur du champ électromagnétique. Pour décrire le champ électromagnétique dans ce formalisme, on peut partir du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur $\mathbf{A}$, dont les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ se déduisent par :

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Le quadrivecteur potentiel associé $\widetilde{\mathbf{A}}$ s'écrit ainsi :

$$\widetilde{\mathbf{A}} : A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \mathbf{A}\right)$$

Le champ électromagnétique lui-même (champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$) est représenté par un tenseur $\widetilde{\mathbf{F}}$ de rang 2 de composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$. Ce tenseur est antisymétrique ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) et on peut le relier au quadrivecteur potentiel $\widetilde{\mathbf{A}}$ par la relation :

$$\widetilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations de Maxwell peuvent dès lors s'écrire sous forme covariante :

Relation aux sources	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$	$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0\, \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$
Structure du champ	$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$	$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$

Force de Lorentz. Dans ce cadre, la quadri-force de Lorentz s'écrit simplement :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu.$$